Landesbibliothek
Coburg

10037
617
32

JO. MICH. POETII

Gründliche

Anleitung

zu der unter den Gelehrten jetzt üblichen

Arithmetischen Wissenschaft,

Vermittelst einer

Parallelen Algebra,

Worinnen zugleich

von Gebrauch derer Rechnungen

in Facultäten und Disciplinen

auch von unterschiedenen Arithmetischen

Instrumenten und Machinen

gehandelt wird.

Samt einer

ANATOMIA NUMERORUM

von 1 —— 10000.

Franckfurt und Leipzig,
bey Joh. Ernst Fritschen, 1728.

88

LEIBNIT. Epist.

ad Vagetium,

in Otio Hanov. pag. 59.

Velim ipse tale conscribi Compendium, in quo παραλλήλως tractetur Algebra & Arithmetica: sunt enim revera eadem scientia, nec differunt, nisi quod Arithmetica agit de numero certo, Algebra de incerto. Unde etiam fit, ut Algebra vel Arithmetica sit ipsa Mathesis Universalis, seu Doctrina de Quantitate in genere, quia nihil aliud est Magnitudo, quam Multitudo partium. Itaque si quis in manus sumat Compendium Arithmeticæ veteris, & aliud Algebræ novæ, & omnia ex opposito transferat à numeris ad literas, seu à numeris certis ad incertos, & vicissim, habebit non contemnendum Arithmeticæ Compendium ad nostri temporis gustum.

Landesbibliothek
Coburg

Vorrede.

DAß man heut zu Tage die Arithmetic nicht mehr durch unbewiesene lange Reguln, und eine zahlreiche Zusam̃enhäuffung blosser Exempel, sondern viel eher durch die allgemeinen Ausdrückungen derer Zahlen und ihrer Eigenschafften erlernen und appliciren müsse, haben gelehrte Männer schon vielmahls angemercket. Und da gleich andern Mathematischen Disciplinen vornehmlich diese Wissenschafft der Zahlen nicht allein der Einbildungs-Krafft vermittelst der uni-

verfellen Bezeichnungen derer Grössen zu Hülffe kömmt, sondern auch durch die dabey vorkommende vielerley und richtig aus einander folgende Vernunfft-Schlüsse den Verstand schärfft, haben sie etliche schon ehemahls auch nur deswegen, (unerachtet ihres andern mannichfaltigen Nutzen in der Haußhaltung und Kauffmannschafft) in grosse Hochachtung gezogen, angesehen, daß die Algebraische Schluß-Kunst so wohl in mathematischen, als auch andern Wissenschafften viele Dinge nach der Grösse ihrer Einflüsse und Würckungen determinire, und daher auch hierinne gar wohl als eine Mathematische Logica könne betitult werden. * Und

* Ill. Leibnitius loc. supra cit. wie auch Herr Prof. Creiling in Logica Mathematica.

dar-

darauf mag wohl der Weltberühmte Leibnitz reflectiret haben, wenn er im anfangs angezogenen Orte gewolt, daß ein kurtzer Auszug der gewöhnlichen Arithmetic durchgehends mit der neuern Algebra möchte vergesellschafftet, und also auch hierdurch die Lehre von denen Grössen überhaupt erläutert werden. Solcher Absicht wo nicht gemäß, iedoch zu Folge habe gegenwärtige Anleitung zu einer Arithmetic, wie sie von denen Gelehrten unserer Zeit bißhero in Ubung gebracht, und nebst einer meist gleichlauffenden Algebra immer nach und nach fortgehet, ans Licht gestellet, in der Hoffnung es werde sie der Geehrteste Leser mit einer so wohl meynenden Intention aufnehmen, als ich sie geschrieben.

Denn daß man der Algebræ auch bey der bekannten Arithmetic von Anfang her immerzu allsachte könne gewohnt werden, habe durch Erfahrung und vieljähriges dociren mehr als einmahl wahrgenommen, und werden die Liebhaber solcherley Wissenschafften dadurch in Stand gesetzet, so wohl die höhern Schrifften der Ausländer, als auch unserer vielfältig analytisch-demonstrirenden Lehrer nach und nach einzusehen, da sonst in deren Ermangelung die meisten Anfänger von denen neuern Erfindungen und ihren Beweisen das nöthigste zu verstehen und zu gebrauchen gar nicht vermögend seyn. * Zu dergleichen Entzweck habe theils innerhalb, theils auch zu Ende sol-

* Wie der Herr Phil. Naude in Miscell. Berolin. pag. 166. allbereit erinnert.

cher

cher Anleitung unterschiedene Exempel von der Application und Nutzen so wohl der gemeinen, als Analytischen Rechnungen in Facultäten und Disciplinen mit angewiesen, damit nehmlich die Liebhaber, diese so nützliche Science wegen ihres sichtlichen Gebrauchs desto mehr und mehr zu erlernen angefrischt, und damit weiter zugehen, geschickt werden, deswegen sind auch die Symbolischen Expressiones und Applicationes in solcherley Calculo guten theils mit hinzugesetzet, um durch die allgemeine Ausdrückungen derer Grössen ohne viel Umwege auch die besondern desto ehender begreifflich zu machen, als durch welche universal-Formuln, wie gnugsam bekannt, dem Gedächtniß in Erspahrung der vielen Special-Reguln, ein sehr merklicher

Vortheil zuwächſet. Denn ob zwar einige dem erſten Anſehen nach die Vermiſchung der abgetheilten und unabgetheilten Zahlen vor eine neue Schwürigkeit dürfften halten, ſo dienet aber hierauf, daß ſolche mehr ſcheinet, als in der That iſt, ja daß die zarten Anfänger auch von forne her nicht möchten abgeſchrecket werden, ſo habe die allererſten Elementa Arithmetica deshalber nicht mögen weglaſſen, ſondern ſo leicht als mir gedüncket voran geſchickt, und die analytiſchen Expreſſiones im Anfang gar ſparſam gebrauchet, biß ſo zu ſagen, unvermerckt inñerzu ein wenig mehr mit eingefloſſen, wordurch vielleicht ein und der andern Leſer Curioſität auch den Buchſtäblichen Calculum, (den ſie ſonſt im erſten Anblick meiſt verabſcheuen, und

als

als Griechische Dinge nicht zu le-
sen begehren,) dennoch in etwas
mit zu Gesichte bekömmt. Wolte
aber iemand gantz und gar nicht
auf die Analysin reflectiren,
so kan er die ihm eckelnde Expres-
siones auch hinweg lassen, und sich
nur an die puren deutschen Re-
guln halten, so wird er eben da-
mit die gegebene Aufgaben be-
rechnen, ob er schon die darauf fol-
gende Beweise indessen so lange
bey Seite setzt, wie im 341. §. schon
erinnert. Beliebten aber einige
zugleich (so ihnen auch niemahls
gereuen wird,) den Calculum spe-
ciosum dabey in Obacht zu neh-
men, so können sie erstlich schlecht-
hin die Ansetzung der unabgetheil-
ten Grössen betrachten, solche im-
merzu mit gemeinen Ziffern erläu-
tern, auch hiermit die Buchstäbli-
chen 4 Haupt-Operationes nach

allerhand Exempeln durchrechnen, ferner die draus herstammende Eigenschafften der Zahlen überhaupt vom §. 242. biß 341. durchgehen, so wird es die übrigen Symbolischen Expressiones und deren Beweise in den folgenden Capitibus nach und nach mit einzusehen, keine so grosse Mühe kosten. Ubrigens habe zwar im 307 §. zuletzt ein Triangulum primorum mit einzuverleiben, gemeynet, es ist aber solcher in der nachhero angehängten Anatomia Numerorum schon mit begriffen, zu deren nützlichen Gebrauch am Ende durch allerhand dienliche Exempel noch eine besondere Anweisung wird zu finden seyn. Geschrieben in Leipzig dem 23. Sept. 1728.

IN-

INDEX CAPITUM
des I. Theils.

I. Cap. Von der Natur der Zahlen überhaupt. pag. 3

II. Cap. Von der Arithmetic und ihrer Eintheilung, wie auch von denen anfänglichen Veränderungen der Zahlen. p. 25

III. Cap. Von denen vier ursprünglichen Rechnungs-Arten, oder Operationibus primariis. p. 40

Sect. 1. Von den Speciebus der blossen oder unbenannten Zahlen. p. 41

2. Von den Speciebus der benahmten Zahlen. p. 73

3. Von den Speciebus der indeterminirten oder unabgetheilten Zahlen p. 102

4. Allgemeine Aussprüche u. Hauptwahrheiten aus denen 4 Rechnungs Operationen p. 130

5. Von den Eigenschafften und Rechnungs Arten der gebrochenen Zahlen p. 176

6. Von einigen Compendiis und Vortheilen in denen 4. Rechnungs-Arten. p. 214

7. Von

7. Von den Proben derer 4. Rechnungs-Operationen. p. 254.

INDEX CAPITUM des II. Theils.

Von denen Operationibus secundariis überhaupt. p. 263

I. Cap. Von der Figuratione Numerorum, oder den figürlichen Zahlen. p. 264

Tabelle von denen figürlichen Zahlen überhaupt. p. 314

Von denen Seiten der unvollkommen Potentzen, oder der Arithmetica Irrationalium. p. 323

II. Cap. Von der Reductione Numerorum. p. 238

1. Von denen Veränderungen der gleichgeschätzten Grössen p. 339

2. Von Veränderung der gemeinen Zahlen in Decimales, oder der so genanten Decimal-Rechnung. p. 343

3. Von Verwandlung der Müntzen, Maase und Gewichte. p. 363

III. Cap. Von der Proportione Numerorum und zwar p. 375

Von

Von der Ratione Geometrica und Arithmetica überhaupt. p. 376

Von der Ratione majoris und minoris inæqualitatis. p. 378

Von der Aehnlichkeit der Verhältnisse, und daher entstehenden Proportion. p. 380

Von der Regula de Tri directa. p. 382

Von 5erley Unterscheid der Rationen. p. 384

Vom Nutzen dieses Unterschieds. p. 386

Von allgemeiner Abtheilung derer Exempel in der Regul de Tri, p. 388
Und Vortheilen darinnen. p. 389

Von der Regul de Tri in Brüchen. p. 392

Von den Modis argumentandi in der Proportion. p. 394

Vom Fundament der Regulæ Societatis, Mixtionis, Alligationis, und Falsi tam simplicis quam duplicis Positionis. p. 396

Von der Progressione Geometrica. p 397

Von Mittel-proportional-Zahlen. p. 401

Von der Proportione Reciproca p. 404

Und

Und der Regula de Tri inversa. p. 405
Von Rationibus compositis. p. 406
Von der Regula de Tri composita. p. 411
Vom Grund der übrigen componirten Reguln. p. 415
Von der Regula Mixtionis und Societatis, wie auch der einfachen Falsi. p. 417
Von der Regula Falsi duplicis Positionis. p. 421
Von der Regula Alligationis. p. 423
IV. Cap. Von der Æquatione Numerorum. p. 430
Vom Unterscheid der Gleichungen und ihrer Wurtzeln. p. 431
Von der Genesi oder Formirung derer quadratischen Æquationum. p. 432
Von den Wurtzeln der unreinen quadratischen Gleichungen. p. 435
Vom Ursprung derer Cubischen und Quadrato quadratischen Æquationen. p. 437
Von Ausfindung der Rational-Wurtzeln aus denen Gleichungen. p. 439

Von

Von Wegschaffung des andern Termini aus den Æquationen. p. 442

Von Ausziehung der Quadrat-Wurtzel aus einem Binomio oder Residuo. p. 445

Von Ausziehung der Cubic-Wurtzel aus denen Binomiis und Residuis. p. 446

Von Erfindung der Wurtzeln aus den Cubischen Æquationen. p. 450

Von Verwandlung einer Quadr. quadratischen Gleichung in eine Cubische. p. 453

Von der Extractione Radicum aus denen Quadr. quadratischen Gleichungen. p. 455

Von Ausfindung der Wurtzel aus einer Æquation nach Vietæ und Ozanams Manier. p. 457

nach des Herrn Newtons Methode. p. 461

nach des Herrn Halley Manier. p. 464

Etliche Exempel vom Nutzen der höhern Extractionen. p. 466

Vom

Vom Gebrauch derer Rechnungen in Facultäten und Disciplinen und zwar
in der Theologie. p. 468
in der Jurisprudentz. p. 470
in der Medicin. p. 487
in der Philosophie. p. 492
Vom Nutzen der Algebræ in der Kauffmannschafft. p. 493
Exempel der Juwelen-Schätzung. p. 494
Von Arithmetischen Machinen und Instrumenten. p. 494
Anhang von der Anatomia Numerorum, oder Zergliederung der Zahlen von 1 biß 10000.

Abhand-

Abhandlung

der

ARITHMETIC.

I. Capitel.

Vom Ursprung, Wesen und Unterscheid, desgleichen von der Schreib-Art und Aussprache, auch einigen Gedächtnis-Vortheilen der Zahlen überhaupt.

1.

Eins, (unum) ist dasjenige, so wir von andern absondern, und ohne Theile darinnen zu beobachten, gantz alleine ansehen. I. Erkl.

Also wenn wir von a a a, zum Exempel, das letzte von den zwey ersten absondern, und es ohn alle Theile nur alleine betrachten, so ist das abgesonderte so viel als Eins.

2. Eine Einheit, (unitas) ist der Begriff, wodurch wir uns Eins vorstellen. II. Erkl.

3. Eine Einheit wird gewöhnlicher Weise mit einer Linie, einem Strichlein, oder einem Finger (I) angedeutet, weiln sich noch heut zu Tage viele, sonderlich die Ungeübten, aus natürlicher Leichtigkeit im Zehlen der Finger bedienen, woraus man zugleich siehet, warum die Lateiner die anfänglichen Zahlen Digitos, oder Finger-Zahlen genennet haben. I. Anmerckung.

4. Ubrigens wird man im folgenden wahrnehmen, daß $\frac{1}{1}$ oder z. E. $\frac{4}{4}$ das ist: überhaupt $\frac{n}{n}$ und in Progressionen: ebenfalls eine schickliche Expression der Unität sey. II. Anmerckung.

III. Erklärung. 5. Etliche oder mehr **Einheiten** heissen **einerley**, (unitates homonymæ oder auch homogeneæ) in so weit wir von einer eben die Kenntniß haben, wie von der andern.

Als von folgenden drey Buchstaben: a, α, ɑ, klingt einer wie der andere, und passiren dahero vor einerley Einheiten in der Aussprache.

IV. Erkl. 6. So bald man aber bey einer eine neue Kentnis bekömmt, die sich bey der andern nicht findet, so heissen sie in Ansehung dieser, **unterschiedene Einheiten**, (unitates heteronymæ, oder heterogeneæ.)

Also weil das Lateinische (a) anders geschrieben wird, als das Griechische (α) so sind es verschiedene Einheiten ratione der Schreib-Art.

Anmerck. 7. Dieser Unterscheid hat grossen Nutzen, indem die Dinge, so man zusamen zehlen will, aus einerley **Einheiten** bestehen müssen, wo anders der Begriff davon soll deutlich werden.

Z. E. Aus sechs Würffeln und eben dergleichen zwey Würffeln hat man eine deutliche Angabe von acht Würffeln. Hingegen hat man aus vier Leipziger- und fünf Brabanter-Ellen noch einen undeutlichen Begriff einer Länge von neun Ellen; und müssen deshalber die Einheiten zum wenigsten der Grösse nach einerley seyn, wenn man sie gehörig will zusammen rechnen.

V. Erkl. 8. Eine Zahl, (Numerus) ist ein Begriff, nach welchem man etwas auf mehr oder weniger als **Eins** schätzet.

Also ist der Begriff von den freyen Künsten, nach welchem man sie auf mehrere, als auf eine schätzet, die Zahl sieben. Also ist eine Decas ein Begriff, nach welchem

chem man sie vor zehnmahl mehr als Eins achtet, und dahero eine Zahl. Desgleichen ist Zweydrittel eine Zahl, weiln sie ihrem Gehalt nach auf weniger, als auf 1. geschätzet wird, nehmlich nur auf den dritten, und wieder auf den dritten Theil eines Dings.

Eben so wird man unten finden, das $\sqrt{18}$ eine Zahl, weil man ihren Gehalt auf 4 und noch etwas drüber schätzet.

9. Auf diese Art ist die Unität die **mittlere** oder das **Mittel** zwischen den Zahlen, über welches nehmlich die grössern Zahlen höher hinauf, und die kleinern tieffer herunter steigen, weswegen einige * das Wachsthum und Abnehmen der Zahlen überhaupt in folgender Reihe angegeben: Zusatz.

$$\&c.\ \ I\quad I\quad I\quad I\quad (I)\ |\ \frac{I}{\ }\quad I\quad I\quad I\ \&c.$$

$$10000\ \ 1000\ \ 100\ \ 10\ \ 1\ \ \frac{1}{10}\ \ \frac{1}{100}\ \ \frac{1}{1000}\ \ \frac{1}{10000}$$

Allwo die Unität in Parenthesi und in der Mitte stehet, in dem andern Range von ihr zur Rechten folget die Decas oder die **zehen**, im dritten der Centenarius, (oder die **hundert**) im dritten der Millenarius (oder die Tausend) und so weiter, nach ihr stehet der **Scheide-Haacken**, (Lineola rectangularis) oder das **Unterschieds-Zeichen**, (Notula separatrix) so sonsten auch mit einem Commate (,) oder Puncto (.) angedeutet wird, und kommen in eben solcher Ordnung die Zahlen, so weniger als Eins gelten, nemlich von der Unität zur Lincken im andern Range **ein Zehntheil**, in dritten **ein hundert Theil**, im vierdten **ein tausend Theil** u. s. w. so im folgenden bald soll klährer werden.

10. Wenn man zwey, drey, vier &c. und mehr gantze Dinge oder Unitäten zusammen nimmt, so ist dasjenige, was daraus erwächset, **eine gantze Zahl**, (numerus integer) als 4. Unitäten, 9. hunderte ꝛc. VI. Erklärung.

11. Also wird eine gantze Zahl ordentlicher Weise auf mehr, als auf 1. geschätzet, und da die Unität ohne dem jederzeit ohne Theile betrachtet wird, (§. 1. 2.) kan man sie lieber **ein gantzes**, als eine gantze Zahl nennen. Zusatz.

* Guil. Oughtred in Op. Math. in princ. Ed. Wels in Elem. Arithm. p. 15.

Wer darüber critisiren will, kan im Laurenbergio und Sturmio * ein mehrers davon nachschlagen.

VII. Erklärung.

12. Hingegen so man ein Ding noch nicht gar einmahl, sondern nur einen oder etliche gleiche Theile davon nimmt, so heist das hinweggenommene eine gebrochene Zahl, (Numerus fractus, fractio, fragmentum, minutia.)

Z. E. Drey Viertel zeiget an, daß der Begriff von einem Dinge auf weniger, als Eins geschätzet wird, nehmlich nur auf den dreymahligen vierdten Theil.

Zusatz.

13. Demnach kan man sagen, daß Eins der Anfang, das Mittel, und das Ende der Zahlen sey, nehmlich der Anfang von den gantzen, das Mittel zwischen gantzen und gebrochenen, und das Ende der gebrochenen.

14. Eine vermischte Zahl (Numerus mixtus) entstehet, wenn man ein gantzes, oder etliche gantze Zahlen, und eine gebrochene Zahl zusammen nimmt.

Als Ein und ein Viertheil, oder fünff und zwey Drittel sind vermischte Zahlen.

Zusatz.

15. Also giebt obige Reihe in §. 9. alle drey Arten der Zahlen an, nehmlich der Unität zur Rechten, gantze, zur Lincken, gebrochene, Lincks und Rechts aber zusammen genommen, vermischte, und ist dieses bey solcher Expression besonders, daß die gebrochenen und vermischten eben so gut nach ihren Stellen (oder Rang) angedeutet werden, wie die gantzen.

VIII. Erklärung.

16. Wie aber aller Sachen in der Welt ihre Notiz vel denominativa vel æstimati-

* Laurenb. in Instit. Arithm. Sturm. in Mathesi Enucl. p. 4.

va, nehmlich auf der Dinge **Nahmen** und derselben **Inhalt** ankömmt, also verlangt man auch bey jeder Zahl zweyerley **Kenntnis**, nehmlich

I. Was gezehlet werde?

II. Wie viel gezehlet werde?

Aus der ersten kömmt die **Benennung** oder der **Nenner**, (Denominator) und aus der andern der **Gehalt**, oder der **Zehler**, (Æstimator sive Numerator,)

Z. E. 1000 hat zu seinem Zehler 1 und Tausend zu seinem Nenner.

17. Und so besteht das Wesen aller Zahlen, sie mögen aussehen wie sie wollen, aus dem Zehler und Nenner, auch so gar hat 1 (eine Unität) oder $\frac{1}{1}$ ihren Zehler und Nenner. Zusatz.

Und weiter hin wird sichs zeigen, daß diese Abtheilung nicht geringen Nutzen in der Doctrin der Brüche hat, damit die Anfänger derselben Zehler und Nenner nicht für was neues und besonders halten, noch unnöthige Schwürigkeiten daraus machen.

18. Ja auf solche Art muß wenigstens der Zehler in den Zahlen allemahl deutlich seyn, denn sonst gäbe er keine Anzeigung, ob ein Ding mehr, oder weniger als einmahl genommen, und folglich auch keine Zahl, (§. 8.) Zusatz.

Als in folgenden wird man sehen, daß von $2a$, $3bc$, $5x^3$, der Zehler 2, 3. und 5 ist, wo nichts stehet ist der Zehler 1. Z. E. y, z^2, $\sqrt{3}$ ist so viel als $1y$, $1z^2$, $1\sqrt{3}$.

19. Mit dem Nenner aber ist es anders beschaffen, denn der Nenner einer Zahl ist deut- IX. Erklärung.

lich und klahr, wenn man die Unitäten oder Theile der Unitäten, daraus er bestehet, also gleich und genau kan anzeigen.

Als 5 zeigt fünff Unitäten. 23 giebt 2 Decades und 3 Unitäten, oder zusammen 23 Unitäten, $\frac{7}{8}$ giebt ein Achtheil von einem Ding siebenmahl genommen, und dieses sind die meisten und gebräuchlichsten Zahlen.

X. Erklärung. 20. Hingegen ist der Nenner etwas undeutlich und dunckel, wenn man die Unitäten, so er bedeutet, nicht so gleich ersehen, sondern durch Untersuchung erst bestimmen kan;

Als $3\sqrt{144}$, oder 3 Seiten eines Vier-Ecks von 144, geben erst nach der Ausziehung 3 Dutzend, oder 3 decades und 6 Unitäten.

Erklär. 21. Aber sehr undeutlich und unaussprechlich ist ein Nenner, wenn man ihn gantz und gar nicht in Unitäten oder völligen Theilen der Unitäten kan angeben.

Dergleichen z. E. $2\sqrt{18}$ sind, allwo zwar 2 der Zehler und $\sqrt{18}$ der Nenner ist, welcher aber weder in aufgänglichen Unitäten, noch derselben zulänglichen Theilen kan verständlich gemacht werden.

Anmerck. Denn unten wird man finden, daß solcher Nenner mehr als 4, aber auch weniger als 5, ja daß er mehr, als $4\frac{2}{9}$, aber auch weniger als $4\frac{2}{8}$ sey, und also weder in gantzen noch gebrochnen Zahlen zulänglich kan angezeigt werden, weswegen dann dergleichen Zahl mit einem solchen unangeblichen Nenner von den Griechen ἄρητος, und von den Lateinern Numerus Surdus, eine **Taube** oder **Dumme** Zahl, (die nicht antworten kan, was sie ist,) benahmet worden.

Diese letzten 2 Abtheilungen der Zahlen können auch die Anfänger vorbey- und erst bey der Potentz- und Irrational-Rechnung durchgehen.

22. Die Zahlen, so schlechterdings Unitäten, oder **einfache Einheiten** andeuten, sind die bekannten **Anfangs-Zahlen**, (numeri initiales, naturales, monadici, unitarii, digiti,) werden mit einem eintzigen Zeichen exprimiret: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. und von diesen kan man sagen, daß sie aus **ursprünglichen Einheiten** bestehen, die man Unitates elementares nennt. Erklär.

23. Diejenigen aber, deren Unitäten zwar zusammen gesetzt, aber doch nachhero ohne Theile, als ein unzerstückter Hauffen angenommen sind, (§. 1.) haben **angewachsene Einheiten**, (Unitates progressionales, und heissen **fortgehende Zahlen**, (Articuli,) und zwar Decades, **wann Zehen**, Centenarii, **wann Hundert**, Millenarii, **wann Tausend**, ꝛc. Unitäten **in einen Hauffen** cumuliret seyn, (als 30, oder Dreyßig, bedeutet drey angewachsene Unitäten, deren iede Zehnmahl so groß ist, als eine ursprüngliche Einheit.) Erklär.

24. Obige **neun Zeichen**: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. werden insgemein die **Ziffern** der Zahlen genennt, (Figuræ numerales, Notæ numericæ oder characteres numerorum,) und heissen significantes oder **geltende Ziffern**, hierzu kommen noch die **Nullen**, oder die Zero, (o o o) so characteres ordinantes oder **stellende Ziffern** sind, die zwar vor sich nichts gelten, aber doch die geltenden an ihren gehörigen Ort stellen, (Als dreyßig kan man nicht mit 3, sondern erst in dem andern Ort oder Rang mit 30 anzeigen,) wovon bald ein mehres. Erklär.

Zusatz. 25. Wo demnach zwey oder mehr geltende Ziffern beysammen stehen, da sind alle vorhergehende Significantes und Ordinantes zugleich; z. E. in 432, sind 2 und 3 significantes, denn 2 bedeutet zwey ursprüngliche Einheiten, (§. 22.) und 3 bedeutet drey Decades, oder zehnfach angewachsene Einheiten (§. 23.) aber sie sind auch zugleich Ordinantes, weiln sie sich vorhergestellet, daß 4 in den dritten Rang kömmt, und also mit ieder Unität zehnmahl zehn oder hundert bedeutet.

Willkührlicher Satz. 26. Nehmlich es hat denen Urhebern gefallen, das zehnfache Wachsthum der Zahlen zu erwehlen, so schlechterdings anfangs in ihrem freyen Willen stunde, * Und wird der complexus denarius, oder computus decadicus genennet, der Zweiffels ohne von der Anzahl der menschlichen Finger seinen Ursprung genommen, ** und nunmehro nach langer Gewohnheit und allgemeinen Gebrauch in den meisten Orten der Welt fast zu einer Nothwendigkeit geworden. ***

Anmerckung. 27. Unten nach der Lehre von Potentzen und Progressionen wird sichs zeigen, daß man ieden complexum numerorum, oder alle Zehl-Arten, sie mögen nun über oder unter 10 gehen, sowohl nach gantzen, als gebrochenen und vermischten Zahlen mit folgender Reihe kan angeben:

&c. C^4 C^3 C^2 C^1 C^0. C^{-1} C^{-2} C^{-3} C^{-4} &c.

I I I I I; I I I I

* Lamy Elemens des Mathem. p. 10. ** Vid. Herr Prof. Ehrenbergs Dissert. de Num. Den. Orig. Mon. de Claire-Combe nouv. & Univ. Prat. d' Arithm. p. 4. *** Wallisius Op. Math. Vol. I. de Math. Univ. c. 4. p. 31.

Da sie denn, wenn C oder der complexus gleich 2, den computum dyadicum oder binarium, wenn C so viel als 4, den Tetracticum, oder quaternarium, wenn C gilt 5, den quinarium, so man sonsten auf den Rechen-Tischen mit den Zahl-Pfennigen gebraucht, wenn C gleich 10, den Decadicum oder Decimalem, wenn C so viel als 12, den complexum Duodenarium &c. vorstellet.

28. Denn man muß die Art in zehnfacher Verhältniß zu zehlen, nicht vor die allereintzigste halten, sintemahln Aristoteles schon gedenckt, daß ein gewisses Volck in Thracia nur biß auf Viere gezehlet, * wovon E. Weigelii Tetractys Tetracty Pythagoreæ respondens mit mehren nachzusehen. Auch hat der Herr von Leibniz den Calculum Dyadicum wieder auf die Bahn gebracht, dessen sich die Sineser schon vor 3000 Jahren bedienet, und haben davon unterschiedene Mathematici allbereit die ersten Operationes, als auch andere nützliche Dinge gar deutlich mit beygebracht. ** Anmerck.

29. Es wären auch der computus dyadicus und quaternarius deswegen leichter gewesen, als alle darauf folgende, weil man im ersten gar kein Einmahleins, und in dem andern nur eines von 3 Sätzen gebrauchet, hingegen hätte die weitläufftige expression mit so vielen Notis im operiren desto mehr Zeit weggenommen. Denn was man bey der Simplicität der Zehler erspahret, das hätte man durch das vielfache fortsetzen zur Benennung wieder verlohren; Und gehet es denen so gar leichten Rechnungs-Vortheilen nicht anders, als den Machinen, die eben um so viel langweiliger gehen, als sie weniger Kräffte brauchen. Deswegen auch der Herr von Leibniz an einem Orte *** schreibt: Wenn man durch Zwölffe oder Sechzehn fortzehlete, hätte man noch mehr Anmerck.

* Probl. 3. Sect. 15. ** Als der Herr Lagny, wovon in der Historie de l'Acad. Royale des Scienc. 1703. p. 76. der Herr Dangicourt in Miscell. Berol. 1710. p. 336. f. der Herr Prof. Wiedeburg in einer besondern Dissert. hiervon Jen. 1718. ingleichen der Herr Pelecanus f. Arithmetico perfecto tria numerare nesciente. Prag. 1712.
*** Memoir. de l'Acad. R. 1703. p. 108.

Vor-

Vortheil; und hat desfalls der Herr Prof. Weidler einen Entwurff vom Computo dodecadico und seinen Operationen communiciret, wenn man ja Lust hätte noch weiter, als auf Zehen zu gehen,* auch hat ehmahls Harsdörffer gewiesen, wie wir mit unsern Buchstaben gar biß auf 24 zehlen könnten.

Satz. 30. Nunmehro aber ist wegen entstehender Rechnungs-Verwirrung nichts anders zu thun, man muß **den zehnfachen Fortgang der Zahlen behalten.**

Und folgende Reihe, darinnen d gleich einer Decadi oder Zehen, zu Untersuchung des einmahl eingeführten Calculi allein gebrauchen:

$$d^n \text{ \&c. } d^3\ d^2\ d^1\ d^0\ d^{-1}\ d^{-2}\ d^{-3} \text{ \&c. } d^{-n}$$

Nehmlich es ist eine in solcher Ordnung stehende Unität:

I I I I I, I I I I

Eine minutia myrefimalis, ein tausend Theil.
Eine minutia millefimalis, ein send Theil.
Eine minutia centefimalis, ein dert Theil.
Eine minutia decimalis, ein Theil.
Eine Monas, oder ursprüngliche Einheit.
Eine Decas, oder zehen Einheiten.
Eine Centuria, oder hundert heiten.
Eine Chilias, oder tausend heiten.
Eine Myrias, oder Zehn tausend Unitäten.

Zusatz. 31. Auf solche Art hat man zu den Expressionen so wohl der grösten, als auch der kleine-

* Dissert. de Præstantia Arithm. decadicæ. p. 29.

sten

sten Zahlen nicht viel Zeichen und Nahmen von nöthen, (und ist dis einer der besten Vortheile, dessen sich die Arithmetici bedienet, so auch nachgehends überhaupt in der Arte characteristica grosse Application gefunden, und allbereit von dem Herrn Hof-Rath Wolffen * und dem Herrn Prof. Hausen angemercket worden. **

32. Denn da man immer ie weiter und weiter etwas auf mehr oder weniger als Eins schätzen kan, und folglich daraus unendlich viel grosse und kleine Zahlen entstehen, (§. 8.) so müste man auch unendlich viel Zeichen und Nahmen haben, wenn man iede Zahl besonders ausdrucken und nennen wolte, welches unserm Gedächtnis gantz unerträglich fallen würde. Derowegen hat man nur die obigen **neun Ziffern** (§. 22. 24.) zu Ausdruckung auch der allergrösten und allerkleinsten Zahlen behalten, wozu man noch die Nulle oder das Zero gethan, daraus denn die so lang-üblichen zehen Characteres gekommen, die man insgemein barbaras Numerorum notas, (**die Indianische Zeichen**) nennet, dergleichen Wallisius *** aus den MS. Tabb. de Sacro Bosco nach den Indianischen Buchstaben angegeben: Anmerck.

1 7 3 & 9 6 5 8 9 0

Dem noch der Vers beygefüget:

Hæc Algorithmus ars præsens dicitur, in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris.)

* In Elem. Math. Univ. Arith. p. 26. §. 48. it. pag. 44. §. 116.
** de Matheſi Semiotica. Lipſ. 1715. *** Treatiſe of Algebra, of numeral Figures p. 8.

33. Sol-

33. Solcherley Ziffer-Rechnung nennet Maximus Planudes Ψηφοφορίαν κατ' Ἰνδὸς, Logisticam Indicam, und berichtet eben Wallisius * daß sie von den Saracenen nach Spanien, und von dar nach Franckreich gebracht worden durch einen Frantzösischen Benedictiner Mönch Gerbertum, von Fleury, welcher nachmahls Ertz-Bischoff zu Reims, denn zu Ravenna, und endlich gar Pabst zu Rom, (Nahm. Sylvest. II.) worden, von dessen translocirung der Vers:

Scandit ab R. Gerbertus ad R. post Papa vigens R.

Und da dieser Anno 1003 gestorben, kan man leicht sehen, daß diese Ziffer-Rechnung schon bey guten Zeiten in Europam gekommen.

Erklär. 34. Diesemnach sind **neunerley Zehler** zu einer Zahl schon zulänglich, (denn die **Nulle** zehlet nicht, sondern ordonniret nur, §. 24.) Die **Nenner** aber pflegen sich über **siebenerley Nahmen** auch nicht leichtlich zu erstrecken, und folglich kan man mit 16. **Wörtern** fast die grösten Zahlen angeben, nehmlich es sind die

Zehler: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

die **Nenner** aber: Unitäten, **Zehner**, **Hunderte**, **Tausende**, **Millionen**, Billionen, Trillionen.

Satz. 35. Wie man nun z. E. bey sehr vielen, aber nur **siebenerley** Sachen, deren iede allemahl in eine gewisse Stelle, oder eigenes Fach gelegt wird, nicht nöthig hat, sie vor dem herausnehmen lange anzusehen, sondern eine iede Sorte man schon aus der Stelle des Fachs weiß, also hat man auch die Benennung zu allen Zahlen zu schreiben, vor unnöthig gehalten, sondern gewisse Stellen und Fächer angeordnet, in wel-

* In denen angehengten Additions and Emendations p. 154.

chen

chen sie also gleich ihren Nahmen, (so zu sagen,) verrathen müssen. Nehmlich in der **ersten** Stelle pflegen die **Nenner** allezeit Unitäten zu seyn, in der **andern** allezeit **Zehener**, und in der **dritten** allezeit **zehnfache zehner**, oder **hunderte**, (z. E. 3 giebt 3 Unitäten, 20 giebt 2 zehener, oder zwantzig. 54 giebt 5 **Zehener** und 4 Unitäten, oder zusammen vier und funffzig Unitäten. 600 giebt 6 **hundert**. 701. giebet **siebenhundert** und eins. 895 giebt 8 **hundert**, 9 **Zehener**, (oder **neuntzig**) und 5, oder **achthundert** und fünff und neuntzig Unitäten. 035 giebt dreyßig und fünffe. 006 giebt uur sechs Unitäten, oder sechse, und 000 giebt gar nichts, wird also im aussprechen übergangen,) und solche erste drey Stellen zusammen geben das erste Fach.

36. In grössern Zahlen nimt man die vierdte Ziffer, oder die vierdte und fünffte, oder auch die vierdte, fünffte, und sechste zusammen vor das andere Fach, und also immerfort biß höchstens dreye zu iedem folgenden Fach. In allen Fächern repetiret man, wie im ersten, die Wörter: **Eins**, **zehen**, **hundert**, iedoch benennet man das gantze erste Fach zusammen nach Unitäten, das gantze andere nach **Tausenden**, der sämtliche Valor aber des ersten Paar Fächer wird noch auf Unitäten geschätzet, hingegen das andere Paar wird nach seinen zwey Fächern ebenfalls wie das erste ausgesprochen, nur daß sein sämtlicher valor nicht mehr auf Unitäten, sondern **Millionen**, (das ist: **tausend mahl tausend** Unitäten) æstimirt wird, gleichwie die Gültigkeit (valor) des dritten Paars auf Billionen, Satz.

nen,

nen, (das ist: tausend mahl tausend Millionen) und des vierdten Paars auf Trillionen, (oder tausend mahl tausend Billionen) ꝛc. hinansteiget, wie aus beygefügtem Schemate erhellet:

achtes	sieben-des	sech-stes	fünff-tes	vierd-tes	drittes	ande-res	erstes Fach.
57	234	867	125	654	562	983	278

Trillionen vierdtes Paar	Billionen drittes Paar	Millionen anderes Paar	Unitäten erstes Paar Fächer.

Woraus denn sowohl eine vortheilhaffte Aussprache, als auch eine leichte Schreib-Art der Zahlen entstehet, und gehöret also hieher

Die 1. Aufgabe.

1. Aufgabe. 37. Eine gegebene Zahl aufs kürtzeste auszusprechen, oder ihren eigentlichen Gehalt gegen der Unität zu bestimmen.

1. Fange man von der Rechten gegen die Lincke an, nehme 3 Ziffern oder drey Stellen zu einem Fach, und distinguire iedes Fach mit einem Commate, oder einem Puncte.

2. Unter das andere Comma, (oder Punct) setze man ein Strichlein, unter das vierdte zwey Strichlein, unter das sechste 3 Strichlein und soweiter.

3. Hebe man zur lincken Hand an, und spreche (wie im 35. S.) das höchste Fach nach Eins, zehn, hundert aus, sage auch so gleich Tausend

send dazu, wenn ein lediges Comma darauf folget, ist es aber ein einfach bestricheltes Comma, so sage man sogleich Millionen dazu, ist es ein doppeltes, Billionen, und so es ein dreyfach bestricheltes Comma, Trillionen, und so verfahre man mit allen folgenden Fächern, biß aufs letzte, welches nur schlechtweg (nach dem 35. §.) ausgesprochen wird.

Also wenn man z. E. vorhergehende Zahl aussprechen wolte:

57, 234, 867, 125, 654, 562, 983, 278,
III II I

so sage man: sieben und funffzig Tausend zweyhundert und vier und dreyßig Trillionen, achthundert und sieben und sechzig Tausend einhundert und fünff und zwantzig Billionen, sechshundert und vier und funffzig Tausend fünffhundert und zwey und sechzig Millionen, neunhundert und drey und achtzig Tausend zweyhundert und acht und siebentzig.

Der Beweiß ist so gleich aus vorhergehenden zwey Sätzen zu ersehen, und fänget man deswegen zur lincken Hand an, weil man dasjenige gern am ersten höret, woran am meisten gelegen.

38. Noch einige Exempel zur Ubung: Exempel.

a) Wenn man in Oeconomicis das 5te oder 6te Korn (auf einem guten Boden) zur Aussaat rechnet, so vermehret sich ein Korn durch jährliches z. E. 6faches Wachsthum binnen 12 Jahren

2.176; 782.336 fach.

b) Nach Cassini und Flamstädts Calculo beträgt die Distantz des höchsten Monds um Saturno, von der Sonnen:

180552700. Deutsche Meilen, und dahero der Diameter unsers Systematis Planetarii: 361105400 Deutsche Meilen.

c) Der Erfinder des Schachspiels Sefa hat vor seine Invention vom König Scheramo Körnlein Geträyde gefordert

18. 444. 744. 073. 709. 551. 615.
''' '' '

womit man (nach Sturmii Dissert. hiervon)
5124059 Kästen Roa voll füllen können.

d) 24. Personen an einer Tafel, oder die 24 Buchstaben im Alphabeth können ihre Stelle verändern:
620448401733239439360000 mahl.

e) Die Zehende vollkommene Zahl ist:
9444732965670570950656.

2. Aufgabe.

2. Aufgabe.

39. Eine vorgesagte Zahl leichtlich und deutlich aufzuschreiben.

1. Entscheide man den leeren Platz nach vorhergehender Aufgabe in bloße und bestrichelte Commata:

, , , , , ,
''' '' '

2. Schreibe man die Anzahl der Trillionen vor das dreyfach bestrichelte Comma, der Billionen vor das zweyfach-, und der Millionen vor das einfach bestrichelte, die Tausende setze man vor das bloße Comma, und die Hunderte, Zehner, und Unitäten zuletzt hinten an.

Z. E. Des Xerxis grosses Heer wieder die Griechen soll seyn starck gewesen: 5 Millionen, zweyhundert und drey

drey und achtzig tausend, zweyhundert und zwantzig, und wird also geschrieben:

5, 283, 220.

Wenn der Diameter eines Circuls 100 Billionen gleiche Theiligen hat, so hält solcher Theiligen die Peripherie oder der Umkreiß, 314 Billionen, 159 tausend 265 Millionen, 358 tausend 979. wird also angedeutet:

100, 000, 000, 000, 000
// /

314, 159, 265, 358, 979.
// /

40. Der Beqvemlichkeit wegen schreibt man grosse Zahlen so gleich mit leeren Plätzen statt der Commatum, denn also darff man sie nicht erst distinguiren, als 1. Anmerckung.

56 537 204 sind 56 Millionen, 537 tausend, 204.

Einige exprimiren die Tausende durch m, und die Millionen durch mm, als: $\frac{67}{m}$ sind sieben und sechzig tausend. $\frac{23}{mm}$ sind 23 Millionen.

Warum man vor die Tonnen-Goldes 5, und vor die Millionen 6 Ziffern abschneidet, wird unten nach der Division angezeigt werden.

41. Archimedes in seinem Arenario nimmt 4 Ziffern zu einem Fach, also daß das erste Fach Unitäten, das andere Myriades, das dritte Bimyriades, (oder Myriades Myriadum,) das vierte Trimyriades &c. bedeuten kan. Z. E. der Abstand der Erden von der Sonne ist nach Hugenii Calculo: * 2. Anmerckung.

4707,,7876,8000 Schuch, nehmlich;

vier tausend 7 hundert und 7 Bimyriades, 7 tausend 8 hundert und 76 Miryades und 8 tausend Schuh.

42. Man setzet an die gewöhnlichen Zahlen einen Punct zur Rechten, damit man, z. E. auf einem Zettel 3. Anmerckung.

* in Cosmotheoro pag. 88. f.

eine blosse Nummer: 969, oder 186. nicht etwa umgekehrt vor 696 oder 981 lesen möchte.

3. Aufgabe.

3. Aufgabe.

43. Eine Zahl zu schreiben, daß man sie nur alleine, und niemand anders aussprechen kan.

Zuweilen will man etwas im Calender oder sonsten wohin notiren, damit es nicht iederman erkennen und lesen soll, und da wollen die ordentlichen Characteres der Zahlen gar zu bekannt fallen. Derohalben suche man sich ein Zehen-Buchstabicht Wort aus, dergleichen viele in Lexicis stehen, als:

Kirschbaum. Morgenthau
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
contumelia
9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

mercke sich solches geheim, und schreibe statt der Ziffern die Buchstaben, z. E. vor 38. Rthlr. 16 Gr. 9 Pf. setze man:

r a : kh : u.

so wird es niemand errathen können.

4. Aufgabe.

4. Aufgabe.

44. Eine Zahl lange im Gedächtniß zu behalten.

Man reducire das gantze Alphabeth mit seinen fast gleichlautenden Buchstaben auf die zehn

zehn Ziffern, und lasse die Vocales: a. e. i. o. u. y. nichts gelten, z. E. es sey.

b. p. w.	c. k. qu. z.	f. ph. v.	g. ch. j.
1	2	3	4

l	m	n	r	ſ	dt
5	6	7	8	9	o.

Dann formire man ſich etwa aus den Umſtänden einer Sache in Teutſcher, Lateiniſcher, Frantzöſiſcher ꝛc. Sprache ein ſolches Wort, deſſen Conſonantes die begehrten Ziffern anzeigen, ſo hat man bey ſolchem Wort nur einen Concept zu behalten, da man ſonſt bey der Zahl drey oder vier Concepte, nehmlich Hunderte, Zehner, Einer behalten müſte.

Z. E. Wenn man will mercken, in welchem Jahr das Schieß-Pulver erfunden worden, ſo behält man nur das Wort:

feuret. oder furit ſcilicet Mars.

3 8 o. 3 8 o

Nehmlich Anno dreyhundert und achtzig. Denn das eine Tauſend verſteht ſich ohne dem ſchon.

Ein Oeconomus will die Anzahl ſeiner Schaafe gerne behalten, und mercket das Wort:

reichen.

8 4 7

ſo hat er achthundert und ſieben und viertzig, und dieſer Vortheil iſt in Chronologiſchen und andern zu mercken-den Dingen nicht zu verachten.

45. Weil wir aber in Büchern und MSeis nicht allein aller- Anmerck.
hand Hebräiſche und Griechiſche, ſondern auch viel alte Lateini-

und Römische Ziffern finden, so achte es vor nöthig, von derselben Schreib-Art und Aussprache auch noch etwas zu gedencken. Es haben nehmlich die Hebräer und Griechen insgemein ihr gantz Alphabeth zu Ziffern gebraucht, und damit so wohl die Einheiten, als auch die Zehner und Hunderte exprimiret, bey den Tausenden haben sie meist wieder von forne angefangen, und sie mit einer Virgula oder einem Häckgen distinguiret, welche Schreib-Art dem Gedächtnis sehr verdrießlich, und daher nicht zu verwundern, daß die Indianische Zehl-Art so bald und sehr bey allen Europäischen Nationen ins Aufnehmen gekommen, weil man mit den Hebr. Griech. und Lateinischen Buchstaben zwar einige Dinge zur Noth numeriren, aber wenig oder gar nicht schicklich in einander calculiren können. Wer davon zulängliche Nachricht verlanget, kan des Herrn Bernhardi Tabb. Literaturæ, Beveregii Arithmeticam Chronologicam, E. Welfii Elementa Arithm. weiter nachsehen, da er denn einen gnugsamen Vorrath von dergleichen Alphabetischen Expressionen wird antreffen. Unterdessen dienet daraus folgende Tabelle, die ein Leser der Hebr. Griech. und Lateinischen Bücher, oder ein Liebhaber der Antiquitäten nicht wohl entrathen kan.

Tabelle zu denen Hebräischen, Griechischen und Römischen Ziffern im Vorfall nachzuschlagen.

1.) Zeichen der Einheiten oder Monadum.				2.) Der Zehner oder Decadum.			
א	α	I	1	י	ι	X	10
ב	β	II	2	כ	κ	XX	20
ג	γ	III	3	ל	λ	XXX	30
ד	δ	IV	4	מ	μ	XL	40
ה	ε	V	5	נ	ν	L	50
ו	ϛ oder F	VI	6	ס	ξ	LX	60
ז	ζ	VII	7	ע	ο	LXX	70
ח	η	VIII.	8	פ	π	LXXX	80
ט	θ	IX	9	צ	ϟ oder G	XC	90

3) Der

3.) Der Hunderte oder Centurien.				4.) Der Tausende oder Chiliadum.
ק	ϙ	C.	100	א", α, M. oder ɔɔɔ. ɔɔɔ. 1000.
ר	σ	CC.	200	ב, β, IIM. oder MM. 2000.
ש	τ	CCC.	300	ג, γ, IIIM. oder MMM. 3000.
ת	υ	CCCC.	400	ד, δ, IVM. MMMM. 4000.
ך	φ	D. ɔɔ. oder Iɔ.	500	ה, ε, VM. oder ɔɔ. 5000.
ם	χ	DC.	600	ו, ϛ, VIM. oder ɔɔM. 6000.
ן	ψ	DCC.	700	ז, ζ, VIIM. oder ɔɔMM. 7000.
ף	ω	DCCC.	800	ח, η, VIIIM. oder ɔɔMMM 8000.
ץ	ϡ	DCCCC.	900	ט, θ, IXM. ɔɔMMMM. 9000.

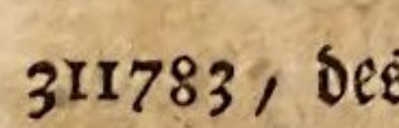
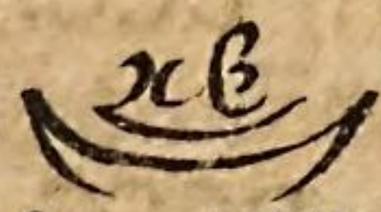
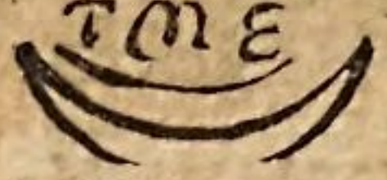
5.) Der Zehntausend oder Myriadum.				6.) Der noch gröſſern.
י, ι, ccIɔɔ.			10000	כ, ϰ, ccccIɔɔɔ. 100000
ל, κ, XXM, oder ccIɔɔ ccIɔɔ. 20000				ל, σ, IIccccIɔɔɔ. oder ccccIɔɔɔ. ccccIɔɔɔ. 200000.
נ, ν, Iɔɔɔ.			50000	ן. ϕ, Iɔɔɔɔ. 500000
ס, ξ, LXM. oder Iɔɔɔ ccIɔɔ. 60000.				ם, χ, VIccccIɔɔɔ. oder Iɔɔɔɔ ccccIɔɔɔ. 600000
				ccccIɔɔɔɔ. 1000000.

Alte Hebräische.

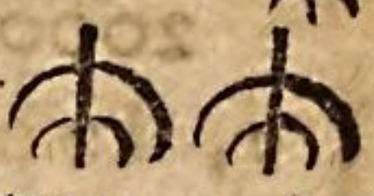
Im Alt-Hebräischen oder Samaritanischen Alphabeth findet man die Literas Finales nicht, sondern man hat in Jüdischen Büchern ק vor 500. ת 800, und תק vor 900 gezehlet, gleichwie man auch א, oder 1000 fast allezeit durch das gantze Wort אלף, 2000 durch אלפים, viel tausend z. E. 4000 durch ד׳ אלפים exprimiret sieht.

Alte Griechische Expressiones der Zahlen.

Die Griechen gebrauchen auch vor 1000, und schreiben oben drüber die Einheiten als Zehner, die Zehner als hunderte, die hunderte als tausende, z. E. Man findet beym Ptolom. l. 4. p. 150. (Basil. 1538.)

 nehmlich 310000 und 1783. oder zusammen 311783, desgleichen daselbst pag. 102.  vor 224609. Und so exprimirte man auch ferner Millionen, als  sind 2452560. Dahero wird eine Myrias bey ihnen geschrieben, nehmlich 10000.

Einige alte Römische oder Lateinische.

Statt 1000 findet man bey den Lateinern ∞ oder
oder , ingleichen I. In alten Inscriptionen ist oder oder so viel als 10000.  ist 20000. Wenn ∞ vorstehet, muß es abgezogen werden, als ∞ ist 19000. Zuweilen findet man auch oder vor 20, und vor 30. ꝛc.

Und

Und auf dergleichen Art findet man in Cicerone $\overline{D}$, vor $\overline{5}00000$. ad Attic. XX. $\overline{CD}$. (20400) im Plinio $\overline{V}$ (5000) $\overline{X}$ (10000) im Strabone $\overline{M}$ (1000 000.) im Frontino II. CC. (2200) und Lamprid. in Alex. S. $\overline{CXX}$. (120000) im Hygino de Lim. Constit. VIII. DCXL. (8640) desgleichen XII. CCCLVIII. (12358) Auch setzet Plinius Lib. 6. c. 17. daß das Land der Scythen am Meere hingegangen: XVIII. LXXV. M. P. nehml. 1875000 Passus, wie auch cap. 23. da er XIII. XXXIII. M. P. vor 1333000 passus schreibet.

II. Capitel.

Von der Arithmetic und ihrer Eintheilung, desgleichen von den anfänglichen Operationen und Veränderungen der Zahlen.

Die Arithmetic ist eine Wissenschafft, so uns die Natur und den Gebrauch der Zahlen gründlich und vortheilhafftig zu erkennen giebt. Erklär.

47. Nun sind die Zahlen vornehmlich auf viererley Weise unterschieden, denn Grund der 1. Eintheilung.

I. Findet sich bey einigen nur eine **innerliche Benennung**, (Denominatio intrinseca, sive ipsorum numerorum,) bey einigen aber auch zugleich eine **äusserliche Benennung**, (Denominatio extrinseca, seu rerum numeratarum.)

48. Die **innerliche Benennung** ist diese, wornach man die blossen Einheiten oder derselben Theile sonder alle Application auf etwas ausser ihnen bedeutendes, ansiehet, und Erklär.

ereignet sich solche nur in den blossen Zahlen, so sonsten Numeri puri, oder abstracti heissen, als:

9. 36. 587. ¾ ℞18.

Die äusserliche Benennung aber ist, wenn der Zahlen Einheiten oder derselben Theile gewisse Dinge vorstellen, und würcklichen Sachen zugeeignet seyn, und werden deßwegen benahmte Zahlen genennet, (Numeri applicati,) als 2 Jahr, 5 Meilen, sonsten auch Numeri materiales, als 9 Centner, 36 Ellen, 7 Eymer, ¾ ℔ ℞18 Quadrat-Ruthen.

I. Eintheilung der Arithm.

49. Und in Ansehung dieses Haupt-Unterscheids haben die meisten ihre Arithmetic in 2 Theile getheilet, nehmlich der erste Theil erkläret die Natur und Eigenschafften der Zahlen, ohne sie auf etwas zu appliciren, er zeiget, wie sie auf verschiedene Art entstehen, und auf allerhand Weise können zergliedert werden, desgleichen wie sie so wohl im gantzen, als auch in ihren Theilen gegen einander müssen aussehen, wird sonst Arithmetica Theoretica, die untersuchende, oder auch die nachdenckliche Rechenkunst genannt. Der andere Theil handelt vom Gebrauch der Zahlen, so man sie auf Sachen appliciret, und weiset, wie nach gegebenen Zahlen die Sachen, oder nach gegebenen Sachen die Zahlen ohne grosse Mühe und Umwege zu bestimmen seyn, heist sonst

Arith-

Arithmetica practica, die Nutzlehrende, oder ausübende Rechenkunst.

50. Die heutigen Autores mischen gerne beyde Theile Anmerck. unter einander, damit die Anfänger so gleich die Application der Arithmetischen Wahrheiten einsehen, und von generalioribus ad specialiora und vice versa schliessen lernen, auch durch angenehme brauchbare Exempel bey der Lust bleiben möchten.

51. II. Ist noch ein grosser Unterscheid zwischen einer ausgemachten und einer unausgemachten Zahl. Denn die ordentlichen Zahlen, womit wir insgemein rechnen, beziehen sich allbereit auf eine angenommene und gewiß gesetzte Unität, nach welcher wir sie auf mehr oder weniger schätzen, z. E. 5 ist fünffmahl so groß als 1. Eine Linie von 23 Zollen zeigt an, daß sie in 23 gleichen Theilen anzunehmen, davon ieder einen Zoll lang ist, und heist deswegen Numerus determinatus oder certus, **eine abgetheilte Zahl.** Hingegen wo man noch keine gewisse Einheit angegeben, auf welche man sie referiren soll, da ist dieselbe noch ein Numerus indeterminatus, incertus,* **Eine unabgetheilte Zahl.** Also benennet man die Höhe eines noch ungemessenen Berges nicht so gleich mit einer abgetheilten Zahl, (denn diese muß schon andeuten, daß ein geroisses Maas so und so viel mahl darinnen enthalten,) sondern mit einem Buchstaben z. E. y, da denn y

Grund der II. Eintheilung. Erklär.

* Numerum in certum & incertum divisit Leibnit. Epist. ad Vagetium in Misc. Leibn. pag. 59.

Viel

viel oder wenig von Meilen, Ruthen, Ellen, oder Schuhen bedeuten kan, nachdem ich nehmlich die Einheit zum Maaß groß oder klein annehme.

II. Eintheilung der Arithmetic.

§ 2. Und aus diesem Fundament hat man die Arithmetic wiederum in 2 diverse Theile gebracht, nehmlich in dem **ersten** handelt man **von den abgetheilten Zahlen**, (Numeris certis oder determinatis,) und wird Arithmetica numerosa genannt. In dem **andern** aber tractiret man vom Calculo Literali, oder der **Buchstaben-Rechnung**, darinnen die **unabgetheilten Zahlen**, (Numeri incerti, oder indeterminati) das ist die Buchstaben a, b, c, d, &c. x, y, z, statt der gemeinen Ziffern angenommen werden, und wird Arithmetica literalis oder auch speciosa benahmet.

I. Anmerckung.

§ 3. Es müssen aber die Anfänger dergleichen Computum literalem nicht etwa vor was unnützes halten, sintemahl er viele und gar ausnehmende Vortheile vor der gemeinen Rechnung hat. Denn 1.) kan man auch die grösten und weitläufftigsten Zahlen, z. E. (oben §. 39.) die Verhältniß des Diametri gegen seine Peripherie mit 2 blossen Buchstaben d : p exprimiren, welches sonst mit gemeinen Zahlen im Multipliciren und Dividiren gar sehr langweilig und mühsam ist. 2.) Darff man die Grössen nach ihren Theilen nicht erstlich zehlen, meßen oder abwägen, noch weniger allemahl derselben Verhältnis unter einander wissen, so sonsten zur expression mit gemeinen Zahlen nothwendig erfordert würde, sondern da kan man eine so gleich mit diesem, und die andere mit jenem Buchstaben gar zulänglich angeben. 3.) Erscheinen die Buchstaben nach gethanen Operationen in allen Rechnungs-Arten noch würcklich, wodurch man nicht allein die-

diejenigen Quantitäten siehet, so zu solcher Berechnung haben müssen genommen werden, sondern auch die Berechnungs-Arten selbsten, also daß man so zu sagen die Bothen und Wege zugleich kennen lernet, wodurch eine gesuchte Sache zum Vorschein gebracht worden. 4.) Werden durch dieserley Rechnung gantz allgemeine Dinge gefunden, so sonsten in der Vulgairen Rechnung nur allemahl in einem eintzelen Exempel heraus kommen, sintemahl ein eintziger Buchstabe, auf einmahl unzehlich viel Zahlen kan vorstellen.

54. Ich werde hierinne dem Vorschlag des Herrn von Leibniz * folgen, und die Buchstaben-Rechnung mit der gemeinen Rechnung so viel möglich conjungiren, iedoch jene bey dieser vermittelst des kleinern Drucks a parte setzen, damit die Anfänger, oder auch diejenige, so sich vor der Algebra scheuen, sie nach Gefallen im ersten Durchlesen auch übergehen können. Denn also wird man dennoch eines Theils die Haupt-Reguln und Exempel zu denen Operationen haben, andern Theils aber wird man die Gründe, woraus dieselben Reguln entsprungen, verstehen, und einfolglich den Modum procedendi per Demonstrationes begreiffen lernen. 11. Anmerckung.

54. III. Ist noch eine Differentz zwischen den Zahlen, deren Nenner man in lauter Unitäten, oder deroselben gleichen Theilen kan angeben, und deswegen Rational-Zahlen (Numeri rationales) heissen, (wovon unten wird beygebracht werden, daß sie zur Unität oder einer gantzen Zahl allezeit eine ausdrückliche Verhältniß haben, z. E. 7. $\frac{5}{9}$ $3\frac{1}{4}$ $\sqrt{25}$. $\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{21\frac{7}{9}}$ &c. so sich zur Unität verhalten wie 7 gegen 1. wie 5 gegen 9. wie 13 gegen 4. wie 5 Grund der III. Eintheil.

* In Otio Hanov. ſ. Misc. Leibn. Ep. ad Vag. p. 59.

gegen

gegen 1. wie 2 gegen 3. wie 14 gegen 3.) Und unter den Zahlen, deren Renner man weder völlig in Unitäten, noch auch in derselben gleichen Theilen kan angeben, welches dann die Numeri irrationales oder surdi seyn, davon unten wird erwiesen werden, daß sie zur Unität oder einer gantzen Zahl gar keine ausdrückliche Verhältnüß haben, und oben schon (§. 21.) davon Erwehnung geschehen, dergleichen z. E. $\sqrt[3]{18}$. $\sqrt{12}$. &c.

III. Abtheil. der Arithm.

55. Und aus dieser Eigenschafft hat man noch die Rechnung abtheilen müssen in Arithmeticam Rationalium, und Irrationalium. In jener handelt man von gantzen, gebrochenen, vermischten, puren und applicirten, determinirten und undeterminirten Rational-Zahlen. In dieser aber nur von Numeris surdis, sie mögen nun determinirt oder undeterminirt seyn.

Grund der IV. Abtheilung.

56. IV. Endlich giebt es noch einen Unterscheid zwischen einer Zahl, deren Theile ohne alle Ordnung unter einander, als ein schlechthin zusammen geraffter Hauffe angesehen werden, und deswegen eine **gemeine Zahl**, (Numerus vulgaris oder absolutus) heist: Und zwischen einer Zahl, deren Theile nach einer Ordnung zusammen gesetzt werden, also daß sie eine gewisse Figur machen, und davon eine **Figürliche Zahl**, (Numerus figuratus) genennet wird, z. E. die Zahl 7, mit ihren also dis-

poni-

ponirten Unitäten ⁘ oder ⁙ ist eine gemeine Zahl, hingegen die Zahl 9 ⁝⁝⁝ ist eine Figürliche oder Quadrat-Zahl.

57. Wovon denn noch endlich die Arithmetic eingetheilet worden in vulgarem und figuratam, jene tractiret die Zahlen ohn alles Absehen auf eine gewisse Dispolition ihrer Theile, diese aber macht entweder aus den Theilen eine gewisse Figur, oder resolviret die Figuren in ihre Theile oder Seiten. IV. Abtheilung der Arithmetic.

58. Wie nun alle materielle Dinge in der Welt ihr Wachsthum durch das Hinzuthun, ihr Abnehmen durch das Absondern, und ihre Gestalt durch die Versetzung derer particuln bekommen, also kan man auch wohl sagen, daß alle Veränderungen derer Zahlen durch die Addition, Subtraction und Transposition ihrer Theile geschehen. Grund der Veränderung der Zahlen überhaupt.

59. Nehmlich alle Cörperliche Dinge ändern sich nur auf zerley Weise, entweder nach ihrer Grösse, oder nach ihrer Gestalt, oder nach beyden zugleich; Also ändern sich auch alle Zahlen entweder durch die compolition und separation ihrer Theile in der Grösse, oder durch die Transposition solcherley Theile in der Gestalt oder Figur, oder auch in beyden zugleich. Z. E. Wenn man zu 6 schlechterdings 1 addiret, oder davon subtrahiret, so ändert sich 6 in der Grösse, denn ersten falls wird mehr daraus, nehmlich 7. im andern Fall aber weniger, nehmlich nur 5. Insonderheit

Ferner wenn ich 6 in zwey gleiche Reihen ⁙ stelle, so kan man ihre Unitäten auf solche Art auf einen länglichen Tisch oder Tafel setzen, und wird deswegen eine

ne längliche Flächen-Zahl genennet, hingegen wenn ich 6 in 3 ungleiche Reihen: ∴ und so zu sagen auf einen Lombre- oder 3eckigten Tisch setze, so ändert sie zwar nicht die Größe, doch aber die vorige Figur und Gestalt, und heist deswegen eine Triangular-Zahl.

Und so man zu 6 noch 4 addiret, wird zwar die Größe, iedoch nicht die Figur geändert, denn sie stellet noch einen Triangul vor: ∴.

So man aber zu 6 z. E. 3 addiret, so verändert sie die Größe und Figur zugleich, und wird aus der länglichen- oder Triangular-Zahl, eine viereckigte Flächen- oder Quadrat-Zahl, nehmlich ⁘

Anmerck. 60. Diese Lehre von der Veränderung der Gestalt einer Zahl muß man nicht etwa vor eine unnütze Subtilität halten, denn es wird sich unten in der Architectura civili und militari, desgleichen in der Mechanica zeigen, daß sie so wohl in der Ordonnance als Auszierung der Dinge, wie auch bey vielen Abtheilungen in andern Disciplinen nicht geringen Nutzen hat.

Grund der Veränderung der Gestalt. 61. Man siehet aber bey solcherley Veränderungen der Zahlen entweder nur auf das blosse Zusammennehmen (Complexum) der Theile, als wenn man ein gantzes: ABC hat, so sind dessen eintzele Theile nicht nur A, B, C, sondern es sinds auch die zusammen gesetzte Theile, oder kleinere Gantzen: AB, BC, und AC, oder man siehet auch zugleich auf die Stellung und vielfältige Auseinandersetzung (Situm) solcher Theile, z. E. die Theile von ABC können in einer Reihe oder Länge unter-

ein-

einander sechserley Gestalt haben, nehmlich ABC. ACB. BCA. BAC. CAB. CBA.

62. Und ob zwar so wohl der Complexus als der Situs der abgetheilten Dinge überhaupt zur Metaphysic in das Caput de Toto & partibus gehören, nehmlich weil beydes Eigenschafften, die denen Dingen durchgehends gemein seyn, so gehören sie doch in Regard der Anzahl ihrer vielfältig möglichen Verwechselungen allerdings mit zur Arithmetic, als welche uns die Natur der Zahlen nicht allein nach der Composition und Separation, sondern auch nach der Transposition ihrer partium erklähren muß, und referiret der Herr von Leibniz die Lehre von den Veränderungen der Complexionen zur gemeinen Arithmetic, die Lehre aber von der Veränderung der Transpositionen zur Arithmetica Figurata. * Anmerckung.

63. Auf solche Weise hat man eigentlich zweyerley Operationes, wenn man die Dinge oder Zahlen in ihrer Größe verändern will, nehmlich man muß gewisse Dinge zusammen thun, oder von einander hinwegnehmen, und wird das erste Additio, das andere aber Subtractio numerorum genannt, z. E. wenn man aus den Theilen 2 und 4 ein gantzes: 6 macht, heist es addirt, und so man einen Theil davon hinweg nimmt, heist es subtrahirt. Auch hat man zweyerley Operationes, wenn man die Gestalt der Dinge ändern, das ist, ihre Theile anders disponiren will, nehmlich man siehet entweder nur auf die Art der möglichen Zusammennehmung (Complexion,) oder auch zugleich auf die Art der Auseinanderstellung (Situm) der Theile, als wenn man setzet: 1, 2, 3, oder 3 und 3, oder 5 und 1, oder 4 und 2 ꝛc. thun 6, so siehet man hier nur auf den complexum der Theile, Erklär.

* In Arte Combinatoria pag. 2.

und wird mit einem allgemeinen Wort Combinatio numerorum genennt, daferne man aber ordnet: 123. oder 132. 231. 213. 312. 321. so siehet man zugleich auf die variation der Stellung (Situm) solcher Theile, und heist Permutatio ordinis, oder Transpositio numerorum.

Anmerck. 64. Wenn man dieses genau betrachtet, so ist die Combinatio nur eine Additio modificata, und die Transpositio eine Subtractio modificata, denn also sagt Lamy: Les Combinaisons ne sont que des manieres d'ajoûter. *

Erklär. 65. Demnach haben wir nur 2 Arten der Veränderung der Zahlen, nehmlich wenn man andere von ihrer Art hinzu thut, wachsen sie grösser, und so man eine oder andere von ihrer Art hinweg nimmt, werden sie kleiner. Im ersten Fall formiret man jederzeit aus den partibus ein Totum, und wird Compositio oder Genesis numerorum genannt, im andern Fall aber resolviret wann ein Totum in partes, und wird Separatio oder Analysis numerorum genennet.

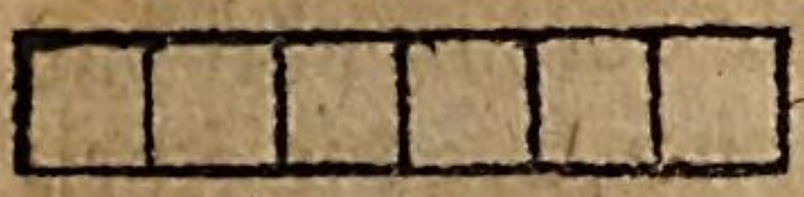
Zusatz. 66. Und so sind die Unitäten, ja die Theile der Unitäten, Elementa der kleinern, und die kleinern, Elementa der grössern Zahlen, nehmlich der Numerorum integrorum, fractorum und mixtorum. (§. 10. seq.)

Erklär. 67. Wenn von zweyen Zahlen iede eben diejenige und eben so viel Elementa hat, als die andere, so sind es zwey gleichgrosse Gantze, und

* Elemens des Mathematiques p. 137.

heis-

heissen deswegen **gleiche Zahlen**, (Numeri æquales.) Nehmlich auf diese Art haben sie einerley Zehler und Nenner, und folglich einerley Wesen. (§ 17.)

68. Und so kan man beweisen, daß die Fläche A:  gleich ist der Fläche B: oder daß 2 mahl 3, oder 3 mahl 2 sechse ist, oder daß 4 Mandel 5 Dutzend seyn, denn jene haben 60 Unitäten oder 6 Decades zu ihrem Zehler und Nenner, und diese auch. I. Zusatz.

69. Folglich kan man von gleichen Zahlen eine in die Stelle der andern setzen, der Grösse unbeschadet, nehmlich man kan iederzeit 2 mahl 3, oder 5 und 1. oder 1. 2. 3 vor 6 setzen. II. Zusatz.

70. Das Zeichen der Gleichheit ist = oder ∞, nehmlich wann stehet: 2 mahl 3 = 6, oder 4 mahl 15 ∞ 5 mahl 12, heist es: 2 mahl 3 ist gleich 6. oder 4 mahl 15 macht 5 mahl 12. Satz.

71. Wenn von zweyen Zahlen eine zwar eben diejenigen aber mehr Elementa hat, als die andere, so heissen sie **ungleiche Zahlen** (Numeri inæquales) also ist eine Mandel grösser als ein Dutzend, weil jenes 15, und dieses nur 12 einerley Elementa hat. Erklärung.

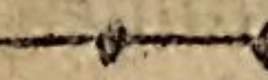
72. Das Zeichen der Majorität, (oder des grössern Gehalts,) ist: >, und der Minorität, (oder des kleinern Gehalts) Zeichen ist: <, z. E. 15 > 12. Ein Leipziger Schuch < Pariser Schuch, wird ausgesprochen: 15 ist grösser, als 12, oder 15 übertrifft 12. Ein Leipziger Schuch ist kleiner, als ein Pariser Schuch, oder ein Leipziger Schuch wird übertroffen vom Pariser Schuch. Satz.

Erklär. 73. Wenn man 2 oder mehr ungleiche Zahlen von einerley Art, (Numeros Homonymos) zusammen nimmt, so entstehet die erste Rechnungs-Art, so insgemein Addiren oder Summiren genennet wird, als wenn man: 1, 2, und 3 zusammen nimmt, so ist die Summa oder das Gantze davon = 6. Da denn 1, 2, 3 die Theile, oder addendi, scil. numeri, und 6 das Aggregat genennet wird.

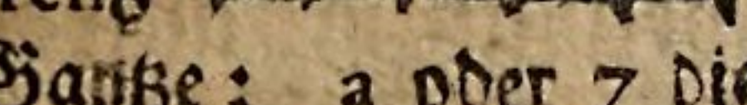
Satz. 74. Das Zeichen der Addition ist + oder — so man durch plus, mehr, oder und ausspricht, also wenn die Linie ⊢——⊣ a zur Linie ⊢————⊣ b gesetzet wird, so ist die gantze Linie ⊢————————⊣ a + b, nehmlich ein Totum, davon a und b partes sind.

Erklär. 75. So man 2 oder mehr lauter gleiche Zahlen zusammen nimmt, so heist zwar dieses auch Addiren, als 2 + 2 + 2 = 6. wird aber durch das bekannte Ein mahl Eins abbreviret, und hierdurch solche Summe auf einmahl gefunden, nehmlich 3 mahl 2 ist 6, oder: $\frac{2}{6}$(3. Dieses compendiöse Addiren nennt man insonderheit Multipliciren, da denn die obere Zahl (2) Multiplicandus, die mittlere (3) Multiplicator, oder Multiplicans, und die untere, (allhier 6) das factum oder das productum heist.

Satz. 76. In determinirten Zahlen ist das Zeichen der Multiplication ein Punct (.) wird durch per, mahl, oder durch ausgesprochen, als 2.3 = 6 oder 7.9 = 63. Die beyden Zahlen, so einander Multipliciren, heissen mit einem gemeinen Nahmen Factores oder Efficientes, oder auch partes aliquotæ, weil eben diese etliche mahl genommen,

men, machen daß das untere product just heraus kömmt, als 7 . 8 = 56, da 8 und 7 factores oder partes al quotæ, und 56. das product. In undeterminirten Zahlen geschiehet die Multiplication durchs Neben ansetzen, als a mit b multiplicirt, giebt ab, da man a und b die efficientes, und ab das factum nennt. Und auf diese Art wird die Multiplication gebraucht, wenn man aus lauter gleichen Theilen ein Gantzes machen will, z. E. Ein Saal von 7 Brettern, (iedes zu 6 Ellen,) lang, ist 42 Ellen lang. Die Linie a  dreymahl genommen, giebt 3 a, oder da a = 2, so sind 3 a = 3 . 2 = 6

77. Wenn man eine, oder unterschiedene kleinere Zahlen von einer grössern hinweg nimt, so entstehet die **andere Rechnungs-Art**, und heist *Subduciren*, oder *Subtrahiren*, sie wird gebrauchet, wenn man etwas in ungleiche Theile resolviren will, z. E. Wenn man den kleinen Theil, 2, von dem Gantzen, 6, nimmt, so bleibet der grössere Theil, 4, übrig. Erklähr.

78. Das Zeichen der Subtraction ist: — so Minus, oder **weniger** ausgesprochen wird, als 6 - 2 = 4, heist 6 Minus 2 ist gleich 4. Und damit kan man aus einem oder etlichen gegebenen ungleichen Theilen eines Gantzen, den noch übrigen Theil, oder den Rest, oder auch die Differentz vom Gantzen finden, als wenn von 15 wären 2, 3, und 6 gegeben, so ist der übrige Theil oder der Rest: 4. Denn 15 - 2 - 3 - 6 = 4. Also wenn von der Linie a oder 7 die Linie b oder 2 hinweg genommen wird, so ist der Rest oder die Differentz  a - b oder 5. Da denn das Gantze: a oder 7 die Summa, oder auch Numerus ex quo (scilicet subducitur) b oder 2 der Subducendus oder Subtrahendus, und a - b oder 5 das Residuum oder die Differentz genennet wird. Satz.

Erklär. 79. Wenn man eine kleinere Zahl von einer grössern hinweg nimmt so viel mahl als man kan, so geschicht es zwar auch durchs Subtrahiren, wird aber vermittelst des **Ein mahl Eins** verkürtzet durchs Dividiren, als: 6-2-2-2-=o oder 6--2=4 || 4--2=2 || 2--2=o das ist kürtzer: 2) $\frac{6}{3}$ Und wird daher gebrauchet, wenn ein Gantzes in etliche oder viele gleiche Theile soll resolvirt werden, da denn die grosse Zahl oder das Gantze (6) Dividendus oder metiendus, die kleinere, so vielmahl hinweggenommen wird, (2) Divisor oder metiens, und diejenige, so da anzeiget, wie viel mahl solche Hinwegnehmung geschehen, (alshier 3) Quotus oder der quotiente genennet wird.

Anm. 80. Das Zeichen der Division sind 2 puncta: oder auch eine dazwischen gezogene Linie, als 6:2=3 oder $\frac{6}{2}$=3, wird ausgesprochen, 6 Dividirt mit 2en ist gleich 3en. Wenn die Linie a in b soll getheilet werden, so ist a:b oder $\frac{a}{b}$=3. Denn die kürtzere b misset die längere a drey mahl aus.

Zusatz. 81. Demnach sind eigentlich zu reden nicht mehr als 2 Species, nehmlich Addiren und Subtrahiren, und kan man damit alles ausrechnen, so man nur gnug Zeit und Gedult dazu zu nehmen vermag, weil aber die Arithmetic den Gebrauch der Zahlen muß vortheilhafftig anweisen, (§. 46.) so ist das Multipliciren als ein Compendium Additionis, und das Dividiren, als ein kurtzer Weg des Subtrahirens zum grösten

Nutzen

Nutzen in allen Libellis Arithmeticis mit bey behalten worden.

82. Und daraus sind die so genannten 4. Species, Addiren, Multipliciren, Subtrahiren, und Dividiren entstanden. II. Zusatz.

83. Solcherley 4 Rechnungs-Arten heist man ursprüngliche Operationes, (simplices oder primarias) so nehmlich in Ausrechnung einer Sache meistentheils nur eintzeln gebraucht werden, z. E. Wenn ich will wissen, wie viel 9 mahl 7 Thl. 2 gr. machen, so darff ich nur die eintzige Multiplication dazu gebrauchen, und tractiret von solchen eintzelen Operationen insgemein der erste Theil der Arithmetic. Hingegen nennet man anwachsende Operationes, (compositas oder secundarias) wenn zur Ausrechnung einer Sache die ersten auf gewisse Art modificiret, oder auch 2 und mehr miteinander componirt werden, und pflegen diese mehrentheils wiederum viererley zu seyn. Eintheilung der Operationen.

I. Bringet man die gemeinen Zahlen in Figürliche, durchs Addiren, und Multipliciren, oder auch durch eine besondere Art vom Multipliciren, und entspringen hieraus die Polygonal- und Potenz-Zahlen, desgleichen die Numeri combinationum und transpositionum.

II. Verwandelt man die ungleichbenahmte Zahlen in gleichbenahmte, durchs Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren, und entstehen hieraus die so nöthigen Reductione so

wohl der Numerorum purorum als applicatorum.

III. Erfähret man theils die unterschiedenen, theils auch die gleichen und ähnlichen Verhältniße der Zahlen durchs Addiren und Subtrahiren, oder auch durchs Multipliciren und Dividiren, und kommen hieraus die vielerley Arten der Rationen und Proportionen, wovon die so genannten Proportion-Reguln.

IV. Handelt man noch von den Æquationen, da man unbekannte Zahlen mit den bekannten in eine Gleichung setzet, und hieraus den Valorem der unbekannten heraus bringt, und braucht man hierzu nicht allein meist alle **ursprüngliche**, sondern auch öffters alle 3 vorhergehende **anwachsende** Operationes, und wird von diesen Operationibus secundariis in den folgenden Theilen der Arithmetic gehandelt.

III. Capitel.

Von denen vier Operationibus primariis, oder ursprünglichen Rechnungs-Arten insonderheit.

Anmerckung von Abtheil.

84 Es ist oben (§. 47. seq.) allbereit angemerckt worden, daß sich viele Unterscheide zwischen den Zahlen befinden, und deswegen will sichs nicht thun lassen, daß man aller ihre Rechnungs-Arten auf einmahl anweise. Wird demnach am besten seyn, vorhero von den Operationen mit **unbenannten**, dann mit **benahmten**, ferner mit undeterminirten, und endlich von denen mit **gebrochnen Zahlen zu handeln.**

Nach-

Nachgehends werden sich die Compendia oder Abkürzungen in denen 4 Speciebus, und zugleich auch ihre Proben mit lassen beybringen.

Die Rechnungs-Arten aber der Irrational- und Figürlichen Grössen können nicht eher als nach dem Capitel von Numeris Figuratis angezeiget werden.

1.) Von den Speciebus der bloßen oder unbenanten Zahlen.

a.) Additio.

85. Die Addition (im weitläufftigen Verstand) erfindet den sämtlichen Gehalt aller Zehler von einerley Benennungen. Als: 3, 4 und 2, (nehmlich Unitäten) machen zusammen 9, (Unitäten) der gesammte Gehalt von 2 hundert, 2 hundert und wieder 2 hundert, das ist, wenn man die Nenner nach denen Stellen andeutet: 200 † 200 † 200 thun 6 hundert, oder 600. Und nach solcher allgemeinen Erklährung begreifft das Addiren auch das Multipliciren mit in sich. Erklär.

Im engern Verstand aber summiret die Addition nur die ungleichen Zehler gleichbenahmter Dinge. Denn gleiche Zehler z. E. 9 † 9 † 9 † 9 zu addiren, wäre unöthig, sintemahl es kürtzer durch das Ein mahl Eins, (nehmlich 4 mahl 9 ist 36.) multiplicando geschehen kan.

86. Demnach sind in Ansehung der Zahlen, so man gewöhnlicher Weise addiren soll, allwege 2 Umstände zu beobachten: Zusatz.

1.) Müssen sie, wo nicht alle, iedoch mehrentheils unterschiedener Grösse, oder inæquales seyn.

2.) Müssen sie alle von einerley Benennung oder Homonymi seyn, und so ist die Additio nichts anders, als Collectio inæqualium homonymorum.

5. Aufgabe.

5. Aufgabe. 87. **Eine Zahl zu finden, so verschiedenen kleinern Zahlen zusammen genommen, gleich ist, oder unterschiedene blosse Zahlen zu** addiren.

1. Setze man die gegebenen Zahlen also unter einander, daß die gleich benanten Sorten, nehmlich die Unitäten unter die Unitäten, die **Zehner unter die Zehner, die Hunderte unter die Hunderte, die Tausende unter die Tausende** ꝛc. fein gerade zu stehen kommen, (so formiret sich von ieder Sorte eine über einander gestellte Reihe, so sonst eine Columne oder perpendiculum homonymorum heist.)

2. Wenn alle erwehnter massen unter einander geschrieben, ziehe man darunter eine Linie, fange an von der Rechten gegen die Lincke, zehle alle Ziffern des ersten Perpendiculs nach und nach zusammen, und setze deren Summe darunter, woferne sie noch keine anwachsende **Einheit**, (Unitatem progressionalem §. 23.) der folgenden Sorte ausmachet.

3. Wo aber der sämtliche Gehalt eines Perpendiculs just auf eine oder mehr anwachsende

de

de Einheiten der folgenden Sorte hinansteigt, so rechne man die Anzahl solcher Einheiten zur folgenden Sorte, und setze unter den allbereit zusammen gezehlten Perpendicul eine Nulle.

4. Und so die Summe eines Perpendiculs über die anwachsenden Unitäten der folgenden Sorte, noch einige eigene Unitäten beträgt, so zehle man wie vorhin die angewachsenen Unitäten zur folgenden höhern Stelle, und schreibe die eigenen Unitäten unter ihren gehabten Perpendicul, auf solche Weise gehe man weiter, so kommt endlich die Summe aller gegebenen Zahlen.

Exempel auf

No. 1 und 2.				No. 3.				No. 4.						
D	C	B	A	D	C	B	A	F	E	D	C	B	A	
1	1	2	1	7	4	3	2	6	8	5	6	7		
4	2	1	1	8	9	6	1			7	6	9	8	
	1	1	2	9	6	2	4	9	2	6	3	2		
1	3	3	1		9	8	3			3	7	8	5	
1	1	2	2	∴	:	.				1	2	9	6	3
7	8	9	7	2	7	0	0	0		1	8	5	6	4

Beweis.

Vermöge geschehener Zusammenzehlung bestehet die gefundene Zahl eben aus denselben, und gleich vielen Elementis, (nehmlich Unitäten, Zehenern, und Hunderten ꝛc.) woraus die vorgegebenen Zahlen bestehen, (§. 30.)

folg-

folglich ist solch aggregat denen vorgegebenen Zahlen gleich. (§. 67.)

1. Anmerckung.

88. Nehmlich A ist die Colomne der Unitäten, B der Decadum, C der Centenariorum, D der Millenariorum, &c. Die angewachsenen Einheiten sind in No. 3. mit Puncten hinüber, unter den folgenden Perpendicul gesetzt, und kan man sie nach einiger Ubung auch nur so lange im Sinn behalten.

2. Anmerckung.

89. Es hindert nichts, wenn auch 2 oder 3 Ziffern im Sinn bleiben, indem man alle beyde, (oder alle dreye) also fort zur folgenden Reihe rechnen kan, z. E. es hätten die Unitäten mit ihrer Summe 216 gemacht, so schreibe man darunter die 6, die 21 Zehener aber zehle man zum folgenden Perpendicul der Decadum, u. s. w.

3. Anmerckung.

90. Will man so gleich, als in einer vorhergehenden Colomne Zehen gezehlet wird, in die folgende neben an einen Punct, (pro Unitate) setzen, so darff man nichts im Sinne mercken, und wird in währender Summation nicht so leicht von iemanden interrumpirt, wie in No. 4. zu sehen.

4. Anmerckung.

91. In grossen Haußhaltungs- und Cameral-Rechnungen, wo gantze lange Seiten addirt werden, kan man auch die Perpendicul in 2, 3 und mehr Sectionen theilen, iede Section besonders addiren, und endlich die besondern Summen in eine eintzige bringen, welche dann unten Latus genennet, und als Transport wieder oben auf die folgende Seite geschrieben wird.

b.) Subtractio.

Erklärung.

92. Die Subtraction, (oder Subduction) (im weitläufftigen Verstand) erfindet die Differenz der Zehler von gleich benahmten Dingen, wenn man den kleinern vom grössern so vielmahl hinweg

weg nimmt als man will. Als wenn 7 (Unitäten) von 15 (Unitäten) genommen werden, bleiben 8. Unitäten.

4 Hundert aus 12 hundert, bleiben 8 hundert, hiervon 4 hundert, bleiben wieder 4 hundert, hiervon noch 4 hundert, bleibt nichts, das ist,

So man die Renner nach den Stellen ansetzet:

	1200
Subtr.	400
	800
Subtr.	400
	400
Subtr.	400
	0

Und nach solcher allgemeinen Beschreibung begreifft das Subtrahiren auch das Dividiren in sich.

Im eingeschränckten Verstand aber ist die Subtraction eine Erfindung der Differentz zwischen den Zehlern gleichbenahmter Dinge, wenn man den kleinern vom grössern **nur einmahl** hinweg nimmt.

Denn wenn wir setzen: 12 -- 4 -- 4 -- 4 = 0 so haben wir 4 können dreymahl hinweg nehmen, und spricht man kürtzer Dividendo: 4 in 12 hat man 3 mahl.

93. Demnach sind bey den Zahlen, so man einmahl von einander will hinweg nehmen, ebenfalls 2 Umstände wahr zu nehmen: Zusatz.

1.) Müssen sie auch inæquales seyn. Denn gleiches von gleichen giebt allezeit 0. und braucht daher keiner Operation.

2. Müssen sie einerley Benennung haben, oder Homonymi seyn, daß also die Subtraction nichts anders, als eine Separatio inæqualium Homonymorum.

6. Aufgabe.

6. Aufgabe.

94. Eine Zahl zu finden, so mit einer gegebenen zusammen genommen, einer gewissen dritten Zahl gleich ist, oder zwey verschiedene Zahlen von einander zu subtrahiren.

1.) Setze man die grössere Zahl oben, dann die kleinere von der Rechten gegen die Lincke anfangende unten darunter, (wie im Addiren geschehen) und ziehe unter die unterste eine Linie.

2.) Nehme man die Unitäten von Unitäten, die Zehner von den Zehnern, die Hunderte von den Hunderten, ꝛc. und setze dasjenige, was überbleibet, in eben die Stelle unter die Linie.

3.) Soll man eine grössere Zahl von einer kleinern abziehen, so borget man vermittelst eines Puncts oben von der folgenden geltenden Ziffer eins, zehlet es iederzeit als 10 zu solcher kleinern Zahl, und subtrahiret so dann die grosse von beyder Gehalt zugleich, so gilt die obere mit ihrem Puncte nochmahls eins weniger.

4.) Findet sich eine Nulle in der obern Zahl, so borge man bey der nechst geltenden obern Ziffer Eins, welches gleicher gestalt 10 gilt, subtrahire die untere von 10, und schreibe den Rest in die gehörige Stelle, so gilt die

obere

obere mit dem punct bezeichnete Ziffer nachgehends ebenfalls Eins weniger.

5.) Stehen aber mehr Nullen so fort neben einander, so übergehe man selbige, und borge nur oben bey der nechstfolgenden geltenden Ziffer vermittelst des Puncts Eins, dann gilt die erste Null 10, von den übergangenen aber iede 9 und die mit dem Punct Eins weniger; Also setze man ferner die Reste von ieder Sorte unter die ihnen gehörige Stelle, so geschiehet nach solchen Reguln die verlangte Subtraction.

Exempel auf:

	No. 1. 2.	No. 3.	No. 4.	No. 5.
f	156879	73463	806040	42000000
p	42356	829	213526	873426
r	114523	72634	592514	33126574
	FEDCBA	EDCBA	FEDCBA	GFEDCBA

Beweiß.

Nach so her geschehenem Abzug hält A in sich den Rest aller Einheiten, B den Rest aller Zehener, C den Rest aller Hunderte ꝛc. Und so ist der gantze Rest r aus eben denselben und gleich vielen Elementis zusammen gesetzt, woraus die besondern Reste A B C D E F bestehen. Daher ist die heraus gebrachte Zahl (r) eben diejenige, so da überbleibet, wenn man die gantze Zahl (p) von der gantzen Zahl (f) subtrahiret, (§. 69.) folglich ist (r) der andere Theil, welcher

cher mit dem gegebenen (p) zusammen das angesetzte Gantze, (s) ausmachet.

Anmerck. 95. Wie man 2, 3 und mehr Zahlen insonderheit von einer dritten abziehen, und die Puncte an die Ziffern des Subtrahendi legen soll, wird unten in Compendiis der vier Operationen angewiesen werden.

c.) Von der Multiplication.

Erklär. 96. Die Multiplication lehret eine Zahl so viel mahl nehmen, als es eine andere Zahl nach ihrem Einheits-Gehalt haben will.

Z. E. 5 mit 3 multipliciren heist 5 so vielmahl nehmen, als es die Zahl 3 nach ihren in sich haltenden Einheiten erfordert, das ist: $5 + 5 + 5 = 15$. Desgleichen heist 6 (nicht ein gantz mahl, sondern) nur $\frac{1}{3}$ mahl nehmen, nichts anders, als von 6 nur 2 setzen.

1. Zusatz. 97. Und so ist das Multipliciren überhaupt nichts anders, als Rem ad præscriptum multiplicantis ponere. Nehmlich wie vielmahl die Unität und der Multiplicans in einander stecken, so vielmahl muß auch der multiplicandus und das product in einander enthalten seyn.

In vorigen beyden Exempeln stecket 1 in 3 eben so vielmahl, als 5 in 15. Und $\frac{1}{3}$ ist der dritte Theil von der Unität, gleichwie das product 2 auch nur der dritte Theil von seinem Multiplicando 6 ist.

2. Zusatz. 98. Also wenn man 15 in 3 gleiche Reihen setzt, entstehet eine Flächen-Zahl: (§. 59.) ⁘ und werden hier 5 so vielmahl gesetzet, als 3 Unitäten hat, es sind aber auch in eben dieser Zahl 3 so vielmahl genommen, als

als 5, Unitäten hat, daher hat 3 mahl 5 eben diejenigen und so viel Elementa als 5 mahl 3, und demnach macht die veränderte Ordnung der efficientium kein ander factum, (§. 67.) wovon unten mit mehren.

99. Gleichwohl ist es in grössern Zahlen bequemer, daß man den kleinen Efficienten unter den grossen setzet, denn mit seinen wenigern Ziffern läst sich der grössere ehender multiplicando durchgehen, als der kleinere mit den Ziffern des grössern, also ist es leichter, wenn man z.E. 6978 mit 243, als wenn man 243 mit 6978 multiciret, ob schon beyderseits einerley heraus kömmt. 1. Anmerckung.

100. Eine Zahl mit einem Bruch multipliciren, heist dieselbige weniger als einmahl setzen, als 12 mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, heist 12 so vielmahl nehmen, als es zweydrittel nach ihrem Einheits-Gehalt haben wollen; Nun halten zwey drittel weniger als 1, nehmlich nur ein doppeltes drittel von einer Einheit, also muß auch das factum nur ein doppeltes drittel vom multiplicando halten, das ist: 4 zweymahl genommen, oder 8. 2. Anmerckung.

101. Und hieraus siehet man, daß die Definition des Multiplicirens nur von den gewöhnlichsten, nehmlich den gantzen Zahlen in einander zu verstehen ist, wenn man sagt: sie sey multiplex Additio. Denn da das product gar offte kleiner heraus kömmt, als der multiplicandus, hat man schon lange angemercket, daß man von der Multiplication überhaupt einen weitläufftigern Concept haben müsse, wenn man auch diejenige mit Brüchen darunter verstehen will. * 3. Anmerckung.

102. Das **einfache** (oder **kleine**) **Einmahl Eins**, (sonst Mensula Multiplicationis, oder Abacus Pythagoricus genannt,) ist eine Herstellung aller producte aus den Anfangs-Zahlen. Erklär.

* Wallisius Oper. Mathem. p. 135.

1. Zusatz. 103. Und da solches gantze Zahlen, deren producte auch durchs addiren können heraus gebracht werden, so darff man nur z. E. 4 drey mahl zu sich selbst addiren, wenn man das factum von 3 mahl 4 oder 4 mahl 3 (§. 98.) wissen will, als:

• • • •		4		4
• • • •	oder	+ 4	oder:	+ 4
• • • •		+ 4		8
		12		+ 4
				12

2. Zusatz. 104. Folglich kan man nur einen Triangul ABC auf jeder Seite in 9 gleiche Theile theilen, und von solchen Theilen die Linien gegen über hindurch ziehen, unten aber noch zwey grade Reihen, jede von 9 Fächern darunter setzen, wenn ein bequemlich Ein mahl Eins soll heraus kommen.

Denn da darff man nur anfangs die monadicos in die erste Reihe aa schreiben, solche noch einmahl zu sich selbst addiren, (oder doppelt nehmen) so kömmt die Reihe bb. Nimmt man so dann die doppelten und die einfachen in der Reihe aa und bb zusammen, so kommen die dreyfachen in cc, und so man die dreyfachen und einfachen wieder zusam̃en nim̃t, so kom̃en die 4 fachen in der Reihe dd &c.

105.

105. Es stehet aber einem ieden frey, ob er sol- Anmer-
che Producta in ein Vier-Eck, in ein rechtwinck- ckung.
licht- oder gleichseitig Drey-Eck setzen will, und hat man hier das Triangulum æquilaterum deswegen erwehlet, weil es leicht zu beschreiben, und nicht allein die Producte auf zweyerley Weise deutlich angiebt, sondern auch die Quadrata, Radices und Cubos unten gar schicklich ordnet. Denn es bringen allemahl die zwey Factores in der untern Reihe, (oder die Radices) ihr Product in der Spitze des darauf stehenden kleinern Trianguls oben mitten darüber sehr kenntlich zum Vorschein, z. E. 6 mahl 9 haben oben in der Spitze, wo 6 und 9 zusammen lauffen, nehmlich bey ff ihr Product 54, und also auch mit andern. Oberhalb den Wurtzeln stehen so gleich die Quadrat-Zahlen, und nachdem man sie zusammen multipliciret, darunter die Cubic-oder Würffel-Zahlen, so in der Doctrin derer Potentzen schon werden ihre Dienste thun.

106. Wenn man Achtung giebt, so wachsen die Hori- Anmerck.
zontal-stehenden Producte nach beygesetzten Seriebus oder Reihen, darinnen die folgenden Zahlen allezeit um 2 mehr sind, und der Anfang von 3 durchaus nach der Ordnung von oben herunter gehet. Nehmlich die untern Quadrat-Zahlen wachsen mit:

Die darüber ste-	3	5	7	9	11	13	15	17
henden wachsen	4	6	8	10	12	14	16	
nach:	5	7	9	11	13	15		
	6	8	10	12	14			
	7	9	11	13				
	8	10	12					
	9	11						
	10							

Und also kan man den Pythagorischen Rechen-Tisch noch auf eine andere Art decken, wenn man nehmlich zu den Anfangs-Zahlen vorhergehende Reihen nach und nach addiret, und so gleich die Summen horizontaliter hinein schreibt.

Es muß aber niemand dencken, daß es mit dem also aufgeschriebenen **Ein mahl Eins** sein Bewenden hat, sondern, wer kurtz und öffters in mente etwas rechnen will, der muß es auswendig wissen, und sollen hierzu unten in Compendiis Specierum auch einige Vortheile mit angewiesen werden.

Erklär. 107. **Das zusammen gesetzte (oder grosse) Ein mahl Eins** ist eine Herstellung der Producte, so aus der Multiplication derer Zahlen, so gröſſer, als die Anfangs-Zahlen sind, heraus kommen.

Anmerck. 108. Man darff das einfache nur continuiren, so entstehet hieraus das gröſſere, jedoch ist nicht nöthig, das Gedächtnis damit zu beschwehren, wenn man nur von einer eintzelen gröſſern Zahl ihre multipla fein behende finden kan, welches gleicher gestalt ohne das **Ein mahl Eins** bloß addendo geschiehet, und ein Tarif genennet wird.

326	1
652	2
978	3
1304	4
1630	5
1956	6
2282	7
2608	8
2934	9

Als man will so gleich die Multipla von 326 wissen, so addire man das Simplum 326 noch ein mahl zu sich selbst, kömmt das Duplum 652. Dieses addire man zum Simplo, kommt das Triplum 978, solch Triplum addire man wieder zum Simplo, dann kömmt das Quadruplum &c. Nehmlich man darff nur die letzte und erste Zahl allemahl zusammen nehmen. Dergleichen leicht zu finden de Multipla

tipla schaffen so wohl in der Multiplication als Division guten Vortheil, wovon bald ein mehres.

109. Ubrigens sind beym Multipliciren wie- Anmerck.
derum 2 Umstände zu mercken:

1.) Pflegen die Zahlen, so man in einander führet, gleichergestalt von einerley Benennung zu seyn, ob sie es schon dem ersten Ansehen nach nicht allemahl scheinen.

2.) Werden so wohl die Zehler in einander, als auch die Nenner in einander multiplicirt.

110. Denn weil iede Zahl aus ihren Zehler und Nen- 1. Erläu-
ner bestehet (§. 17.) so heist eine Zahl durch eine Zahl mul- terung.
tipliciren nichts anders, als einen Zehler durch den andern Zehler, und einen Nenner durch den andern Nenner multipliciren, z. E.

Unit.	Unit.	Unit.	Unit.	Unitäten	3
3 durch	2 facit	6	oder	6, das ist nach	2
				den Stellen:	6

Decades	Unit.	Decades.	Unit.	Decad.	40
4	durch 2 geben	8		oder 8 das ist	2
				nach den Stellen:	80

Decad.	Centen.	Dec.	Cent.	Millenar.	30
3	durch 2 thun	6		oder 6 das ist:	200
					6000

Centen.	Cent.	Cent.	Cent.	Myriades	300
3	durch 3 machen	9		oder 9 das ist:	300
					90000

Und also auch in gemeinen gebrochnen Zahlen:

Viertel Halbes Halbe-Viertel Achtheil

3 durch 1 thun 3 oder 3, das ist, wenn man sie Bruchs-Weise schreiben will:

$^{4}3$ durch $^{2}1$ machen $^{8}3$, oder nach gemeiner Art:

$\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ geben $\frac{3}{8}$

So unten in Rechnungs-Arten der Brüche schon soll klärer werden.

2. Erläut. III. Und ob schon die Denominatores intrinseci von einander unterschieden sind, als die Unitäten von Decadibus, die Decades von Millenariis, &c. und weder in Additione simplici noch multiplici schlechthin dürffen zusammen genommen werden, so können doch alle, indem sie durchgehends Denominatores Unitatum sind, (§. 30. Nehmlich die Decades sind der Unitäten Decades, die Millenarii sind der Unitäten Millenarii &c.) als homonymi betrachtet, und also zusammen multipliciret werden, z. E.

	3.	Decades Unitatum		30 Unit.
durch	2.	Unitates Unitatum	das ist:	2 Unit.
geben	6	Decades Unitatum.	thun:	60 Unit.

	3	Millenarii Unitatum		
durch	3	Decades Unitatum		3000 Unit.
geben	9	Decad Millenar. oder	das ist: mit	30 Unit.
		9. Myriades Unitatum	thun	90000 Unit.

3. Erläut. 112. Auf gleiche Weise multipliciret man auch in gebrochenen Zahlen nicht allein Viertel mit Viertel, 6theil mit 6theilen, 10theil mit 10theilen ꝛc. sondern auch Viertheil mit Halben, Drittheil mit Fünfftheilen, 10theil mit 100theilen ꝛc. Nehmlich weil alle solche Brüche, als Theile von einerley Unität oder Sache, und folglich homonymisch angenommen werden, welches z. E. in $\frac{2}{3}$ thl. und $\frac{3}{4}$ gr. nicht geschiehet, in dem sie zusammen multiplicirt, weder $\frac{6}{12}$ thlr. noch $\frac{6}{12}$ gr. ausmachen.

113. Daß man aber das Factum von den Nennern der Gantzen nicht eben so, wie das Factum der Nenner von Brüchen absonderlich exprimiren darff, ist keine andere Ursach, als daß die Benennung der Gantzen aus den Stellen, der gemeinen Brüche aber nicht aus den Stellen, sondern aus ihrer Ober- oder Unterschrifft pfleget verstanden zu werden. z. E. 30 mit 200 multipliciren, ist nicht 200 mahl 3, oder 600 setzen, sondern weil hier 3, (nicht Unitäten, sondern) Decades bedeutet, so müssen die 600 in die andere Stelle zu stehen kommen, und 600 mahl 10, das ist: 6000 machen. (§. 110.) * Anmerck.

114. Dahero kan man nur bey denen Zahlen, welchen einige Nullen angehänget sind, die geltenden Ziffern in einander multipliciren, und zum Facto die sämmtliche Anzahl der Nullen hinansetzen. Zusatz.

7. Aufgabe.

115. Eine Zahl zu finden, die so groß gegen einer andern Zahl ist, als eine gegebene gegen Eins, oder zwey gegebene Zahlen in einander zu multipliciren. 7. Aufgabe.

1.) Ziehe man unter die grössere Zahl (den multiplicandum) eine Linie, und setze die kleinere Zahl, (den Multiplicatorem,) zur rechten Hand bey Seite.

2.) Nehme man iedwede Ziffer des Multiplicandi nach und nach so viel mahl (vermittelst des Ein mahl Eins) als die letzte Ziffer des Multiplicatoris Unitäten hat, (§. 96.) fange

* Wie solches auf diese Art und noch mit mehren Herr Wels in seinen Elementis Arithmeticæ Numer. und Specioſæ pag. 60. und in Notis pag. 67. und 68. ausführet.

beyderseits von der rechten Hand an, und schreibe die Producte eben also und in solcher Ordnung darunter, wie man oben in der Addition mit den Summen gethan hat. (§. 87.)

3.) Desgleichen nehme man iede Ziffer des Multiplicandi ferner so viel mahl, als die folgende Ziffer des Multiplicatoris Unitäten hat, iedoch fange man an, die Producte unter diejenige Stelle zu schreiben, welche die gebrauchte Ziffer des Multiplicatoris hat inne gehabt, (§. 110. und 113.)

4.) Unter dergleichen stückweiß-heraus gebrachte Producte, (so man zusammen Facta partialia nennt,) ziehe man eine Linie, und addire sie gewöhnlicher massen, (§. 87.) so giebt die Summe das Haupt-Factum.

Z. E. Man soll 3512 mit 24 multipliciren, oder man soll eine Zahl finden, die so groß gegen 3512, als 24 gegen Eins ist, so stehet die Operation also:

Multiplicandus	3512	(24 Multiplicator
erstes Factum partiale:	14048	
anderes Factum partiale:	7024	
Factum Totale:	84288	

Beweiß.

Das erste Stückweiß-heraus gebrachte Product, (hier 14048) begreifft alle Theile des Multiplicandi so vielmahl in sich, als die letzte Ziffer des Multiplicatoris, (hier 4.) Unitäten hat, (besage der Operation und des **Ein mahl Einses.**) Und das folgende stückweiß-heraus ge-

gebrachte Product begreifft gleicher gestalt alle Theile des Multiplicandi so viel mahl, als die folgende Ziffer des Multiplicatoris Unitäten hat, (§. 110.) Nachdem aber das Haupt-Factum denen stückweiß-heraus gebrachten Producten gleich ist, (§. 87.) wie auch der Multiplicator seinen Theilen, (hier 4 Unit. und 2 Decadibus,) so hält solch Factum Totale den gantzen Multiplicandum so viel mahl in sich, als der gantze Multiplicator die Unität, (§. 67.) Demnach ist die gegebene Zahl (3512) begehrter massen multipliciret, (§. 97.)

116. Indem das andere Factum partiale allezeit weiter hinein gerücket wird, so siehet man hieraus, daß die letzte Ziffer vom ersten Facto partiali allezeit im Haupt-Facto noch mit muß zum Vorschein kommen. Dahero auch in solcher Ziffer sich alle Haupt-Facta endigen müssen. z. E. wenn man 547 mit 98 multiplicirt, muß sich das Factum Totale in 6 endigen. Zusatz.

117. Weil man eine Zahl von der vornehmsten und gröstẽ Benennung zu allererst pflegt auszusprechen, (§. 37.) so wird man hinfort diejenige Ziffer, so in Loco Unitatum stehet, die letzte nennen, worinnen sich nehmlich eine Zahl endiget, welches einmahl vor allemahl soll erinnert seyn. Anmerck.

118. Daß man die eintzelen Producte aus dem Einmahl Eins auch gantz darunter schreiben, die Unitates progressionales nicht im Sinne behalten, auch von der lincken Hand gegen die Rechte zu, anfangen dürffe, haben unterschiedene Autores allbereit schon angewiesen. * Anmerck.

* P. Prest. Nouv. Elem. des Mathematiques, p. 32. Herr Prof. Becker in einer besondern Dissertat. de Multiplicatione Cap. IV. §. 3.

Anmerck. 119. Wenn der Multiplicator, oder eine Ziffer des Multiplicatoris 1 ist, so brauchet es keine Multiplication. Denn da der Multiplicator der Unität gleich ist, so muß auch das Product den Multiplicando gleich seyn, (§. 96. und 97.) und darff er also nur abgesetzet werden, Z. E. 732 mit 11. multiplicirt:

732

thun: 8052

Anmerck. 120. In dem viel mahl Nichts eben so viel macht, als ein mahl Nichts, und die Nullen keine geltende, sondern nur stellende Ziffern sind, (§. 24.) so übergehet man die Nullen so wohl im Multiplicando, als auch im Multiplicatore, wann etliche mitten darinnen zu stehen, vorkommen. z. E.

3700065 (84 — 14800260 — 29600520 — 31080546o

35042 (7009 — 315378 — 245294 — 245609378

Anmerck. 121. Endigen sich aber die Efficientes in eine oder mehr Nullen, so multipliciret man nur die geltenden Ziffern in einander, und setzet die Anzahl der Nullen von beyden Efficienten unten ans Ende des Haupt-Facti, (§. 110.) als:

79200 (6000 — Fac. 475200000

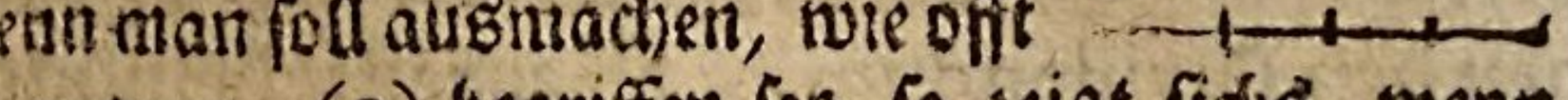
42000 (570000 — 294 — 210 — 23940000000

d.) Von

d.) Von der Division.

122. Die Division lehret aus zwey gegebenen Zahlen eine dritte finden, die da andeutet, wie viel mahl die eine in der andern enthalten ist. Erklär.

Z. E, wenn aus 3 und 15 die dritte Zahl soll gefunden werden, die da anzeigen soll, wie offt die kleinere (3) in der grössern, (15) stecke, so ist solche dritte Zahl, 5 Also auch wenn man soll ausmachen, wie offt



(4) in (2) begriffen sey, so zeigt sichs, wenn man die grössere Quantität auf die kleinere appliciret, daß 4 noch nicht gar einmahl, sondern nur $\frac{2}{4}$ mahl, oder $\frac{1}{2}$ mahl in 2 enthalten sey.

123. Solche dritte Zahl, die den viel- oder wenig mahlen Gehalt zweyer Dinge in ander, anzeigt, wird mit einem besondern Wort, der Quotus, der Quotiente, der Anzeiger, oder Angeber genannt. Erklär.

124. Was demnach die Multiplication zusammen nimmt, das löset die Division wieder auf, so muß man dahero die Mensulam Pythagoricam auch mit zur Division brauchen, und eben deswegen, daß 5 mahl . . .(3) ⁞⁞⁞⁞⁞ (15) macht, inferiren, daß 3 in 15 just 5 mahl enthalten seyn, oder daß von 15 der 5te Theil just 3 austräget, desgleichen daß 5 in 15 just 3 mahl begriffen, und 5 ein dritter Theil aus 15 sey. Zusatz.

125. So vielmahl also die Unität in dem Quotienten stecket, so vielmahl muß auch der Divisor in dem Dividendo begriffen seyn, als hier Zusatz.

hier stecket 1 in 5 fünffmahl, gleich wie 3 in 15 auch fünffmahl. Und so man 15 mit 5 dividiret, ist der ietzige Quotus (3) dem vorigen Divisori gleich, und der ietzige Divisor (5) wird dem vorigen Quoto gleich. Da nun vorhin 1 gegen den Quotum sich verhielte, wie der Divisor gegen den Dividendum, so kan man gleiches vor gleiches setzen, und auch sagen: daß 1 gegen den Divisorem sich verhält, wie der Quotus gegen den Dividendum. Begreifft demnach der Divisor die Unität so vielmahl in sich, als der Dividendus den Quotum.

Zusatz. 126. Woraus denn folget, daß die Unität gar nicht dividiret, nehmlich weil alsdenn der Divisor der Unität gleich, so ist der Dividendus auch dem Quoto gleich, und braucht es daherо keiner Operation.

Anmerck. 127. Auch siehet man aus solcherley Zertheilung, daß der Divisor in blossen Zahlen nichts anders, als ein **abgetheiltes Maaß** ist, mit welchem ein Ding muß ausgemessen werden, und daß der Quotus nicht mehr thut, als daß er zehlet, wie viel mahl solch Maaß in dem gemessenen zugereichet hat, und so kan man das Dividiren auch beschreiben, daß es nichts anders sey, als Rem ad præscriptum distinctæ Mensuræ metiri.

Erläuterung. 128. Zwar schlecht hin kan man mit einem grössern unabgetheilten Maaß eine kleinere Grösse nicht deutlich messen. Allein da die Numeri determinati nach einer gemeinschafftlichen Unität distinguiret und ausgetheilet

seyn,

seyn, * so messen dennoch der grössern gantzen Zahl ihre Theile eine kleinere gantze Zahl, wenn schon die kleinere von der gantzen grössern nicht ausgemessen wird. Und auf diese Art kan man von abgetheilten Zahlen auch überhaupt sagen, daß man mit ihnen so wohl theilen als messen kan, ob schon sonsten der P. Taquet wohl angemercket, daß Divisio mehr, als Mensio involvire, indem man auch eine kleinere Zahl mit einer grössern dividiren, aber nicht messen könne, wenn man nehmlich setzet, daß das gantze Maaß ein oder etliche mahl genommen, allezeit dem zumessenden soll gleich werden. * *

129. Da nun das Mensuratum aus eben denen, und so vielen Elementis bestehet, als die so viel mahl genommene Mensur, so muß das Factum Divisoris und Quoti allemahl den Dividendum wieder herstellen, (§. 67.) Zusatz.

Z. E. wenn man ⁝ ⁝ ⁝ ⁝ ⁝ (15) mit ⁝ (3) ausmisset, und siehet, daß 3 davon der fünffte Theil ist, so muß solcher fünffte Theil (so vielmahl, als es der Quotus anzeigt, als hier) 5 mahl genommen, dem gemessenen Gantzen gleich seyn. Ebener massen da von 4 in 2 nur die Helffte vom gantzen Maaß ist begriffen gewesen, so muß auch $\frac{1}{2}$ mahl 4 just wiederum 2 machen. (§. 124.)

130. Und hierinnen liegt der Grund zur Division, nehmlich wenn ein Divisor gegeben, so muß der Quotus nicht grösser oder kleiner genommen werden, als daß beyder Product den Dividendum restituirt, z. E. Es sey der Theiler 6, und die zutheilende Zahl 42, so kan der Quotus nichts anders, als 7 seyn, weil das Fa- Grund der Division.

* Von Numero distincto besehe man Herrn Prof. Hasii Dissertation de Nihilo Mathemat. pag. 4. und 12.
* * Taquet. Elem. Arithm. in Euclid. Lib. V.

ctum

dum von 6 und 7 eben solchen Dividendum wieder herausser bringt.

Zusatz. 131. Woraus man nochmahls siehet, daß die Unität, als Divisor, gar nicht dividiret, indem sie den Quotum nicht multipliciren kan, (§. 119.) Dahero er an und vor sich selbst schon dem Dividendo muß gleich seyn.

Erklär. 132. Daferne aber ein Factum Divisoris und Quoti in gantzen Zahlen den Dividendum nicht gantz heraus bringt, so nennet man dasjenige, was in der **zutheilenden Zahl** übrig bleibet, Reliquum oder Residuum, als weil 4 die Zahl 11 nicht gäntzlich dividiret, so ist der Quotus 2, und das Residuum 3.

Zusatz. 133. Und da auf diese Art das Factum Divisoris und Quoti gleich ist dem Dividendo weniger dem Residuo, (§. 119.) so ist das Factum Divisoris und Quoti mit dem Residuo gleich dem Dividendo.

Z. E. Wenn 11 mit 4 dividirt, 2 bringt und 3 überbleiben, so ist:

$$4.2 = 11 - 3 \text{ und } 4.2 + 3 = 11.$$

Zusatz. 134. Das Residuum kan also nicht grösser, auch nicht so groß seyn, als der Divisor. Denn sonst steckete er noch einmahl drinne, und müste demnach im ersten Fall der Quotas wenigstens um 1 grösser seyn, im andern Fall aber müste er just um 1 grösser seyn, und würde so dann das Factum Quoti und Divisoris den Dividendum recti-

restituiren, und gar nichts überbleiben, welches wieder obige Bedingung wäre.

135. Dahero offenbahret sich ein Fehler im dividiren, Anmerck. wenn eben so viel, oder noch mehr übrig bleibt, als die Zahl ist, womit man dividiret hat, das ist: wie die Arithmetici sagen, das Residuum muß wenigstens um 1 kleiner, als der Divisor seyn.

136. So der Dividendus aus vielen Ziffern Anmerck. bestehet, nimmt man auf einmahl nur einen Theil vom Dividendo, und siehet, wie offt der Divisor darinnen enthalten.

Z. E. 6 in 1926 kan ich nicht auf einmahl dividiren, und dahero nehme ich anfangs nur 19 hundert, und sage, 6 in 19 habe ich 3 mahl, und setze den quot (3) in den dritten Locum, nehmlich der Hunderte ꝛc.

Dergleichen Theil nun, welchen man nur Erklär. auf einmahl nimmt, heisset man Dividuum, scil. numerum, und so wären in obiger Zahl die Dividui erst 19 hundert, dann 12 Decades, und endlich 6 Unitäten.

137. Weil die Division aus einander nimmt, was die Anmerck. Multiplication zusammen gesetzt, (§. 124.) so sind im Dividiren eben auch iederzeit 2 Umstände zu observiren:

1.) Müssen die kleinere Zahl, so die grössere ausmisset, und die grössere, so von der kleinern ausgemessen wird, (mit einem Wort: Mensura und Mensuratum) homogenisch seyn.

2.) Werden so wohl die Zehler in einander, als auch die Nenner in einander dividiret.

138.

Erläuterung. 138. Denn ob wohl die Denominatores intrinseci gar selten im Divisore und Dividendo einerley seyn, sintemahl man öffters mit den Unitäten in die Decades und Centenarios, oder mit diesen in die Millenarios oder Myriades &c. dividiren muß, so sind es doch allezusammen originaliter Denominatores Unitatum, oder ursprüngliche Einheiten (§. 30.) und sind 9 Myriades mit 3 Decadibus getheilet, nichts anders, als 90000 Unitäten mit 30 Unitäten dividirt. (§. 111.)

Erläuterung. 139. Desgleichen da iede Zahl aus ihrem Zehler und Nenner bestehet, (§. 17.) so dividirt man eine Zahl durch eine andere, wenn man der einen Zehler mit der andern Zehler, und der einen ihren Nenner mit der andern ihren Nenner dividiret, als:

Unit. Unit. Unit. (:) Unit. Unit.
8 mit 2 dividirt, bringen 8 : 2 = 4

Cent. Dec. Cent. (:) Dec. Dec.
6 mit 2 dividirt, thun 6 : 2 = 3

das ist, wenn man die Nenner nach ihren Stellen andeutet:

6 0 | 0
2 | 0 (bringen 30.

Millen. Dec. Mill. (:) Dec. Cent.
6 mit 3 dividirt, geben 6 : 3 = 2

das ist: 6 0 0 | 0 (geben 200. (Vermöge des 130 und 121 §.)
3 | 0

Desgleichen auch in Brüchen, allwo entweder die Nenner einerley, oder doch gemeinschafftliche Theile von einerley Unität oder Sache sind:

Achtheil Achtheil 8 : 8
6 mit 2 dividirt, geben 6:2 = 3 = 3

das ist nach gemeiner Art: $\frac{6}{8}$ mit $\frac{2}{8}$ divid. geben $\frac{3}{1}$ oder 3.

zwan-

Zwantzigtheil Fünfftheil 20:5
9 mit 3 divid. bringen 9:3 = $^{4}3$, das ist,
nach gewöhnlicher Bruchs-Expression:
$\frac{20}{9}$ dividirt mit $\frac{3}{5}$ geben $\frac{3}{4}$

So in Brüchen an seinem Ort schon soll klärer werden.

140. Wo aber die Benennungen nicht homonymisch sind, (welches iezuweilen in Numeris Applicatis oder concretis geschiehet,) da kan man sie auch nicht schlechterdings in einander dividiren, als: $^{20}9$ thlr. mit $^{4}3$ gr. dividirt, geben weder $^{5}3$ thlr. noch $^{5}3$ gr. Auch geben 48 Zoll mit 2 Schuhen dividirt, weder 24 Zoll noch 24 Schuh, sondern man schreibt sie indessen: $^{20}9$ thlr : $^{4}3$ gr. oder 48 Zoll : 2 Schuh, bis sie nehmlich erst reducirt worden, wovon unten im Capite Reductionis. Anmerckung.

141. Wenn eine kleinere Zahl mit einer grössern soll dividirt werden, so muß im Quoto weniger als 1, nehmlich ein Bruch (§. 12.) kommen. Denn wenn der wahre Quotus 1 oder mehr machte, so käme im ersten Fall das Factum Divisoris und Quoti, das ist: der Divisor dem Dividendo gleich, im andern Fall aber müste der Divisor kleiner seyn, als der Dividendus, (§. 129) welches beydes wieder die angenommene Bedingung wäre. Lehrsatz.

142. Demnach schreibt man den grössern Divisorem unter einen kleinern Dividendum vermittelst einer gezogenen Linie nur darunter, als: 2 mit 4 ausgemessen oder dividirt, giebt so gleich den Quotum:

Viertel $\frac{2}{4}$

2 oder $\frac{2}{4}$ (§. 122.) oder, wenn man den Nenner (nicht aus Neusucht, sondern aus trifftigen Ursachen, wovon bald in Brüchen ein mehres,) mit einer kleinen Ziffer will oben vorhersetzen: $^{4}2$. Zusatz.

Zusatz. 143. Und weil dasjenige, so im Dividendo überbleibet, so zu sagen, noch die Stelle eines Dividui vertritt, so muß man es auch noch dividiren, und bringt nach vorhergehenden, einen Bruch, den man noch zum Quoto setzen muß. Dahero schreibt man solch Residuum aus dem Dividendo hinter den Quotum, nehmlich man setzet es gewöhnlicher massen oben, ziehet unten her eine Linie, und setzet den Divisorem darunter, als 11 mit 4 dividirt, giebt im Quoto $2\frac{3}{4}$, oder so man den Nenner will oben setzen, distinguire man die Gantzen vorher durch zwey commata, und schreibe: 2,,^{4}3, und wird nun der Quotus eine vermischte Zahl, deren Gantze mit dem Divisore multiplicirt, und der Zehler zum Facto addirt, den Dividendum wieder genau herausbringen. (§. 133.)

8. Aufgabe.

8. Aufgabe. 144. **Zu finden wie offt der Gehalt einer kleinern Zahl in dem Gehalt einer grössern Zahl begriffen sey, oder eine gegebene Zahl mit einer kleinern zu dividiren.**

Uberhaupt ist zwar die Regul zur Division gar kurtz, Nehmlich:

Anmerkung. **Man setze die Ziffern des Quoti nicht grösser, als daß sie mit dem Divisore multiplicirt, von ihrem ordentlich fortgehenden Dividuo können abgezogen, und daß die Reste iederzeit kleiner, als der Divisor, werden.** (§. 134. 135.)

Alleine wegen einiger Umstände ist es nöthig, solche Regul deutlicher und etwas weitläufftiger zu machen.

Auflösung. 1.) **Unterscheide man den Dividendum vom Quoto mit einem Strich, oder halben Mond, setze**

setze den Divisorem zur Lincken an die Seite, und schliesse ihn mit einem kleinen Bogen ein.

2.) Eigne man anfangs dem Divisori aus dem Dividendo seinen sattsamen Dividuum zu (§. 136.)

3.) Bestehet nun der Divisor aus einer einzigen Ziffer, so forsche man vermittelst des Einmahl Einses wie offt er in dem Gehalt der ersten, (oder der beyden Ziffern) des Dividui enthalten sey, und setze den Anzeiger, das ist, den Quotienten hinter den halben Mond.

4.) Daferne aber der Divisor aus mehr Ziffern bestehet, forsche man, wie offt die erste Ziffer des Divisoris in dem Gehalt der ersten, oder der beyden ersten Ziffern des Dividui begriffen sey, und setze den Anzeiger inzwischen nur in Gedancken zum Quotienten.

5.) Multiplicire man mit der eingebildeten Ziffer des Quotienten den gantzen Divisorem, und sehe, ob solch Factum dem Dividuo entweder gantz gleich, oder doch so weit gleich komme, daß es nach geschehener Subtraction, (§. 94.) allezeit weniger überlasse, als der Divisor ist. (§. 134. 135.)

6.) So sich dieses also befindet, schreibe man den in Gedancken gehabten Quot hinter den halben Mond würcklich aus, fange von forne an, und subtrahire das Factum ieder Ziffer des Divisoris in die gefundene Quots-Ziffer,

nach und nach vom Dividuo, ſtreiche die Ziffern des Dividui, davon man abgezogen, ſo gleich aus, und ſetze den Reſt, (wenn einer bleibet,) fein ordentlich darunter.

7.) Hat nun der Diviſor noch nicht biß ans Ende des Dividendi gelanget, ſo concipire man, daß der Diviſor in der nechſt folgenden geringern Stelle des Dividendi ſtehe, nehme zu dem vorigen Reſt, (ſo einer da iſt,) die drauf folgende Ziffer des Dividendi, ſo kom̃t ein neuer Dividuus, und zu dieſen erfinde man eine neue Quots-Ziffer wie zuvor; Iſt aber der gantze neue Dividuus zuſammen genommen kleiner, als der Diviſor, ſo ſetze man im Quoto eine Nulle, und nehme wie zuvor wieder einen neuen Dividuum.

8.) Auf dieſe Art verfahre man immer weiter, biß durch die concipirte Fortſetzung die letzte Ziffer des Diviſoris den letzten Locum des Dividendi occupiret hat, dann werden im Quoto ſo viel Ziffern heraus kommen, als die letzte Ziffer des Diviſoris im Dividendo hat Stellen erreichen können, und zuſammen anzeigen, wie offt der Theiler in der zutheilenden Zahl enthalten ſey.

Z. E. Man ſoll angeben, wie offt die Zahl 6 in der Zahl 47412 enthalten ſey?

Dividendus 47412 (7902 Quotus

47
54
1
12
} Dividui.

Diviſor 6) 6

Des-

Desgleichen soll man die Zahl 910117 in 28 gleiche Theile theilen, das ist, mit 28 dividiren.

Dividendus

Quotus

Divisor 28) 𝔊𝔦𝔒𝔦𝔦𝔗 (32504 5 Residuum
𝔉𝔗𝔐 𝔉(5 28. Divisor.
𝔉
𝔦

Hier waren die Dividui 91. 70. 141. 11. und 117.

Beweiß.

Vermöge geschehener Rechnung und des Ein mahl Einses, deutet iede Ziffer des Quoti nach der Reihe an, wie offt der Divisor in denen (Zehn Tausenden) Tausenden, Hunderten, Zehnern und Unitäten der zutheilenden Zahl, das ist: in allen Elementis des Dividendi enthalten, (§. 30. 66.) Derowegen zeigt auch der gantze Quotus, wie offt der Divisor in dem gantzen Dividendo begriffen ist, (§. 69.) Und ob zwar ein grosser Divisor nicht so stracks auf einmahl seine gewisse Ziffer im Quoto hat können herstellen, so ist sie doch nicht eher vor die rechte angenommen worden, als biß man (nach der anfänglichen General-Regul,) gesehen, ob ihr und des Divisoris Factum von dem dazu gehörigen Dividuo mit Zurücklassung keines, oder doch eines kleinern Restes hat können abgezogen werden. Demnach ist die vorgegebene Zahl mit der kleinern begehrter massen dividirt. (§. 122.)

145. Vorhergehende Regul ist von der ordentlichen Division zu verstehen, denn wie eine kleinere Zahl mit einer

Anmerckung.

ner grössern soll dividirt werden, ist oben (s. 141.142.) schon erinnert, und wird man davon in Brüchen und in der Reduction ein mehrers beybringen.

II. Art zu divid.

146. Man kan auch unter dem Dividendo Platz lassen, und eine Linie ziehen, unter welche man das gantze Factum des Divisoris und einer Quots-Ziffer schreibet, selbiges von seinem zugehörigen Dividuo subtrahiret, und den Rest, (so einer bleibet,) darunter setzet.

Ebenermassen verfährt man auch mit den folgenden Factis, nur daß man nicht vergist, sie von hinten her ordentlich in ihrem gehörigen Rang schieff unter einander zu schreiben.

Diese Art nennen einige Division à la Portugaise, * und wird deswegen recommendirt, weil zuletzt die Summa solcher Factorum partialium den gantzen Dividendum wieder herstellet, und zugleich durchs Addiren eine Probe abgiebet, als:

765) 37.4085 (489
68.8
6

3068
6128
6885

Probe: 374085

Bleibet oben ein Residuum, so muß man es mit dazu addiren, (§. 133.) der Beweiß und eine Erinnerung soll unten in den so genannten Proben gegeben werden.

III. Art zu divid.

147. Bey grossen Divisoribus gehet die Operation auch sehr leichte, (und ohne erst mit der Quots-Ziffer einen Versuch zu thun,) nach einer Art, so man à la Indien-

* Monier de Claire-Combe dans le Negoce rendu facile, p.63.

ne

ne nennet, * durch bloſſes addiren, ſubtrahiren und ohne Ein mahl Eins, wenn man (nach dem 108. §.) den Diviſorem biß aufs Noncuplum continuiret, ſo die Indianer einen Tarif heiſſen, z. E. Man ſoll 19033480 8 mit 5476 dividiren:

	Tarif.	Anzeiger.
Diviſor:	5476	1
	10952	2
	16428	3
	21904	4
	27380	5
	32856	6
	38332	7
	43808	8
	49284	9

Dividendus: 19.033.480.8

Quotus: (3475 8

26.056.06

41.17.8

343

Nehmlich wenn dem Diviſori ein ſattſamer Dividuus, (als hier 19033) zugeeignet, ſo ſuche man eben dergleichen oder ein nechſt weniger Multiplum Diviſoris in dem gemachten Tarif, (als hier 16428) ſubtrahire es vom Dividuo, und ſchreibe ſolches Multipli Anzeiger, (hier 3) als Quotum. Ferner nehme man das gekommene Reſiduum (2605) mit einer folgenden Ziffer des Dividendi (hier 4) vor den neuen Dividuum, und verfahre damit wie vorher, u. ſ. w. (alles nach der allgemeinen Regul der Diviſion,) (§. 144.) Erläuterung.

148. Von dieſer Manier zu dividiren ſagt L. C Stur- mius, daß ihr an Behändigkeit keine viel vorgehe, an Gewißheit aber gar keine. ** Anmerck.

149. Wenn der Diviſor in der Mitten einige Nullen hat, ſo übergehet man ſie in der Multiplicatione Diviſoris und Quoti, und ſubtrahiret nur die Facta der letzten geltenden Ziffern von den letzten Theilen des Dividui. Kommen aber auch im Dividendo mitten hin etliche Nullen Anmerck.

* Monier de Claire-Combe Lib. cit. pag. 65. 66.
** Im kurtzen Begriff der geſammten Matheſis II. Theil p. 19.

zustehen, so ist schon oben aus der Subtraction bekannt, daß die erste Nulle, von welcher man wegnehmen soll, Zehen, und die übrigen, so man im Borgen übergangen hat, Neune gelten, (§. 94. No. 5.) z. E.

```
                 53000045          17933
20008)  1298.4.63  (264           20008
        1793
```

Anmerck. 150. Haben beyde der Divisor und Dividendus zuletzt Nullen, so schneide man alle vom Divisore ab, und eben auch so viel vom Dividendo, und procedire so denn, als wenn sie beyderseits nicht da wären, z. E.

```
                 1665000|00
45|00)           41          (37000
                 33
```

Denn weiln alle Multipla von o wiederum o machen, (§. 96.) und iederzeit im Quotienten so viel Ziffern heraus kommen, als die letzte des Divisoris durchs an- und fortsetzen im Dividendo hat Stellen erreichen können, (§. 144. No. 8.) so reichet der gantze Divisor mit allen seinen Nullen eben so weit im gantzen Dividendo, als der mit Nullen abgeschnittene Divisor in dem mit eben so viel Nullen abgeschnittenen Dividendo, das ist: so offt hier die Unitäten in Myriadibus stecken, (nehmlich 10000 mahl) so offt stecken auch die Hunderte in Millionen, (nehmlich hier auch 10000 mahl, (§. 139.)

Zusatz. 151. So derowegen dem Divisori alleine nur etliche Nullen ankleben, schneide man sie dennoch alle ab, und auch so viel geltende Ziffern vom Dividendo, dividire mit dem übrigen Divisore biß an den gemachten Abschnitt des Dividendi wie gewöhnlich, und so ein Rest bleibet, setze man ihn mit sammt den abgeschnittenen Ziffern als einen Bruch noch hinten an Quotum. (§. 143.)

z. E.

z. E.

52 | 000 (72 $\frac{15463}{52000}$

3259 | 463
215
x

152. Aus ieder von den vier vorhergehenden anfänglichen Operationen ist wahrzunehmen, daß man alle geltende Ziffern, sie mögen nun in einer Stelle stehen, wo sie wollen, bloß als simple Unitäten könne ansehen, und an den Valorem Decadum, Centenariorum, Millenariorum &c. gantz und gar nicht nöthig zu gedencken habe, wenn man sie nur in ihre gehörige und nach der Ordnung folgende Stelle setzet. Denn eben in solcher Stelle, oder in dergleichen range verrathen sie schon ihre Nahmen und Bedeutungen, (§. 35.) welche künstliche und kurtz gefaste Anordnung derer Zeichen in solcherley Rechnungs-Art allerdings werth ist, daß sie admirirt wird, ob schon die wenigsten zuweilen darauf pflegen acht zu geben. * Anmerckung überhaupt.

2. Von den Speciebus der benahmten Zahlen.

153. Die benahmten Zahlen dienen zur Praxi auf vorhergehende Theorie, und weil ihre Unitates progressionales nicht mehr aus Zehen kleinern Einheiten, sondern bald aus wenigern, bald aus mehrern bestehen, so ist es nöthig, vorhero gleichergestalt ihre Elementa erst zu untersuchen, und anzuzeigen, wie viel man Einheiten der klei- Anmerck.

* Wie also der ältere Sturmius davon schreibet in Matheſi Juvenili pag. 22.

nern Specierum nehmen müsse, daß sie eine Einheit der grössern Specierum austragen, z. E. daß 12 Pfennige eine Einheit in den Groschen, und 24 Groschen eine Unitatem progressionalem in den Thalern machen, u. s. w.

Anmerck. 154. Und ob wohl einige zu meynen pflegen, es giengen dergleichen Resolutiones nur die Kauff-Leute und Hauß-wirthe an, so betrügen sie sich doch gar sehr, und kan kein Gelehrter die Kräffte der Natur, und die gemachten Experimenta in hiesigen und andern Landen genau einsehen, auch die Pretia Rerum, so in Jure und in der Medicin bißweilen zu wissen, nöthig seyn, gegen einander determiniren, wenn er nicht weiß, wie die Müntzen, Maasse und Gewichte in kleinern Theilen unterschieden seyn, zu geschweigen, daß man sie in der ausübenden Mathesi bey Aus-Messungen, Visiren, Civil- und Militair-Bau-Sachen, in Anordnung und Berechnungen der Machinen ꝛc. gantz und gar nicht entrathen kan.

Zusatz. 155. Es verlohnt sich derohalben noch wohl der Mühe, daß man die Grösse und Abtheilungen so wol der inn- als ausländischen Numerorum Materialium wo nicht inne, iedoch beyhanden habe, und præmittiren sie auch deswegen die meisten Autores der practischen Arithmetic. * In welcher Absicht ich auch folgende Täflein von den vornehmsten Gewichten, Maassen und Müntzen, wie solche hier zu Lande, und dann (wegen Nachlesung der Diariorum Gallicorum und Anglicanorum) in Franckreich und Engelland gebräuchlich sind, mit beygesetzet, wer mehr davon verlanget, kan in Ed. Bernardi Lib. de Mensur. & Pond. in D. Jon. Moore Comp. Math. in Jo. Casp. Eisenschmidii Disquisitione nova de Ponder. & Mensur. desgleichen in des Herrn Joh. Georg Schoaps Europäischen Gewichts-Vergleichungen, davon in Jac. Leupoldi Theatro Statico universali ein Extract zu finden, weiter nach sehen.

* Vid. Ozanam Diction. Mathem. unter dem Tit. Arith. Pract. pag. 52.

156. Damit es aber nicht zu weitläufftig werde, sol- Eintheil.
len vorerst die hiesigen und ausländischen Krahm-Gold und Silber- und Apothecker-Gewichte, dann die gebräuchlichsten Maase, so wohl der Längen, als auch der Truckenen, und Flüßigen Dinge, und endlich die gangbahrsten Münzen mit ihren Abtheilungen auf einander folgen.

157. I. Täflein, die gebräuchlichsten Sorten des hiesigen Krahm-Gewichts betreffend:

Dr. Gewicht.

4	Quintlein.				
16	4	Loth.			
512	128	32	Pfund.		
11264	2816	704	22	Stein.	
56320	14080	3520	110	5	Centner.

Not. 100 Pfund Leipziger Gewichte thun in Paris und Amsterdam 95 Pfund, in London schwer Gewichte $92\frac{8}{21}$ Pfund. *

158. II. Täflein zu Gold und Silber-Gewiche.

Grän.					
3	Gran.				
12	4	Karat.			
18	6	$1\frac{1}{2}$	Loth.		
36	12	3	2	Unzen.	
144	48	24	16	8	Marck.

* Mon. de Claire-Cemb. Negoce rendu facile pag. 449.

Not.

Not. Nach der Reichs-Ordnung thun 67. Ducaten, 69½ Cronen, und 72 Gold-Gülden just 1 Marck Cölnisch. *

Es thun aber 105 Pfund Leipz. 104. Cölnische. **

159. III. Täflein zu Apothecker-Gewicht.

Gran.				
20	Scrupel.			
60	3	Drachma.		
480	24	8	Untzen.	
5760	288	96	12	Pfund.

160. IV. Täflein zum Frantz-Gewichte.

Carobe.						
24	Grain.					
576	24	Denier ou Carras.				
1728	72	3	Gros.			
13824	576	24	8	Once.		
110592	4608	192	64	8	Marc.	
233184	9216	384	128	16	2	Livre de Paris.

Ein Frantzösischer Centner (Quintal) hält 100 Pariser Pfund.

* Leupoldi Theatr. Static. Univ. pag. 89.
** Cl. Combe ibid. p. 449.

161. V. Täflein zu Englischen Gewicht, davon das Pfund a Pound Averdupois genannt wird.

Scrup.	Drachm.	Unc.	Libr.	Cent.	
3					
24	8				
384	128	16			
43008	14336	1792	112		
860160	286720	35840	2240	20.	Tonna,

Die Engl. Untze verhält sich gegen der Pariser wie 12159 gegen 13125, und thut demnach 534 Pariser Gran. *

162. VI. Täflein zu Englischen Gewicht, auf ein Pound Troy genannt, dessen man sich in Experimentis Philosophicis bedienet. **

Granum minus.	Granum majus.	Untze.	
24			
480	20		
5760	240	12	Pfund.

Der grosse Gran heist bey ihnen a Penny Weight; der kleine a Grain. ***

Diese Untze verhält sich gegen der Pariser wie 480. gegen $472\frac{1}{2}$, und wiegt demnach $585\frac{1}{7}$ Pariser Grain.

* Eisenschm. de Mens. & Pond. p. 14.
** Ed Wels Elem. Arith. p. 39.
*** Eisenschm. de Mens. & Pond. ibid.

163. VII. Täflein zum Frantzösischen Silber- und Gold-Gewicht.

Felins.				
2	Mailles.			
4	2	Estelins.		
80	40	20	Onces	
640	320	160	8	Marc. *

164. VIII. Dergleichen Täflein etwas weitläufftiger:**

Grains.						
$7\frac{1}{5}$	Felin.					
$14\frac{2}{5}$	2	Mailles.				
24	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	Deniers.			
$28\frac{4}{5}$	4	2	$1\frac{1}{5}$	Estelins.		
72	10	5	3	$2\frac{1}{2}$	Gros.	
576	80	40	24	20	8	Onces.
4608	640	320	192	160	64	8 Marcs.
9216	1280	640	384	320	128	16 2 Livre.

165. IX. Wegen des Frantzösischen Medicin- und Apothecker-Gewichts ist noch zu mercken:

1. Livre thut 2 Marc
1. Marc wieget 6 Onces

* Diese Abtheilung hat Ozanam in Diction. Mathem. p. 53.
** Eisenschm. in Disquis. de Mens. & Ponder. p. 4.

1. On-

1. Once - - - 3 Duelles
1. Duelle - - - 1 Sicilique und 2 Scrupules
1. Sicilique - - - 1 Sextule und 2 Scrup.
1. Sextule - - - 1 Dragme und 1 Scrup.
1. Drachme - - - 3 Scrupules
1. Scrupule - - - 12 Grains. *

166. X. Täflein zum Englischen Apothecker Gewicht.

Grain.	Scrup.	Drachm.	Unc.	Livre.
20				
60	3			
480	24	8		
5760	288	96	12	

Vom Längen Maaß.

167. XI. Täflein zu hiesigen Längen Maassen.

Zoll.	Viertel.	Schuch.	Ellen.	Klafter.	
6					
12	2				
24	4	2			
72	12	6	3		
182	$30\frac{1}{3}$	$15\frac{1}{6}$	$7\frac{7}{12}$	$2\frac{1}{3}\frac{9}{6}$	gewöhnliche Ruthe.

* Ozanam ibid.

168.

168. XII. Täflein zu dem Frantzösischen Längen-Maaß.

Points.						
12	Lignes.					
144	12	Pouces.				
1728	144	12	Pieds.			
10368	864	72	6	Toises. †		
31104	2592	216	18	3	Perche.	

† Sonst auch Verge oder Brasse genannt.

Not. 15. Leipziger Zoll thun (sehr nahe) 13 Pariser Zoll, wie sie aber nach der grösten Schärffe zu vergleichen, wird unten angewiesen werden.

169. XIII. Täflein zum Englischen Längen-Maaß.

Zoll.								
3	Palmus.							
9	3	Spanne.						
12	4	$1\frac{1}{3}$	Schuch.					
18	6	2	$1\frac{1}{2}$	Cubitus.				
36	12	4	3	2	Yard.			
45	15	5	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	Ell.		
60	20	$6\frac{2}{3}$	5	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{4}$	Schritt.	
72	24	8	6	4	2	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{5}$	Fathom.
198	66	22	$16\frac{1}{2}$	11	$5\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{5}$	$3\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$ Ruthe.

Not. 14. Leipziger Zoll thun 13 Londensche Zoll.

Von

Von den Maasen zu trockenen Dingen.

170. XIV. Täflein von hiesigem Getrayde-Maaß.

Kleine Metzen.

2	Kuchen-Maaß oder grosse Metzen.				
8	4	Viertel.			
32	16	4	Scheffel.		
384	192	48	12	Malter.	
768	384	96	24	2	Wispel.

171. XV. Täflein zum Franzöf. Getrayde-Maaß.

Litrons.					
16	Boisseaux.				
48	3	Minots.			
96	6	2	Mines.		
192	12	4	2	Sestiers.	
2284	144	48	24	12	Muid à bled de Paris.

Not. Ein Litron hält 36 Cubic-Zoll, und ein Muid à bled wiegt in Paris 2640 Pfund netto.

172. XVI. Täflein zum Englischen Getrayde-Maaß.

Pinta.			
8	Congius. ††		
16	2	Satum. †	
64	8	4	Modius.

† Engl. a Peck. †† Engl. a Gallon.

Not. Die Capacität eines Gallons beträgt $272\frac{1}{4}$ Cub. Zoll, und hält rein Wasser 9 Pfund, 13. Unzen, $12\frac{1}{2}$ Drachm Averdupois. Blome in the Gentlemans Recreations setzet den Korn-Gallon auf 268 $\frac{8}{}$ Cubic-Zoll. pag. 141.

Von Maaßen zu flüßigen Dingen.

173. XVII. Täflein zu hiesigem Wein-Maaß.

Quartier.	Nösel.	Kannen.	Eymer, Visir-Maaß.	Eymer, Schenck-Maaß.	Fuder.
4					
8	2				
432	108	54			
512	128	64	$1\frac{5}{27}$		
5144	1536	768	$14\frac{2}{9}$	12	

174. XVIII. Täflein zum Bier-Maaß.

Kleine Kannen.	Große Kannen	Tonnen.	Viertel.	Faß.	Gebräude.
$1\frac{1}{6}$					
105	90				
210	180	2			
420	360	4	2		
7560	6480	72	36	18	

Not. Hier ist das Faß auf 6 Schock grosse, und 7 Schock kleine Kannen gerechnet, und eine kleine Kanne hält 42 Leipziger Cub. Dec. Zoll, wovon in der Stereo-

metrie

metrie mit mehren, sonst wird auch die kleine oder Dreßdner-Kanne auf 41. 265748. Dreßd. Cub. Zoll æstimiret. *

175. XIX. Täflein zum Frantzösischen Wein-Maaß.

Poissons.	Demi-Septiers.	Chopines.	Pintes.	Quartes.	Sestiers.	Feuillettes.	Muid à Vin de Paris.
2							
4	2						
8	4	2					
16	8	4	2				
64	32	16	8	4			
800	400	200	100	50	$12\frac{1}{2}$		
2400	1200	600	300	150	$37\frac{1}{2}$	3	

Ein Poisson hält 6 Cubic-Zoll.

176. XX. Täflein zum Englischen Getränck-Maaß.

Pinte.	Gallon.	Barrel.	A Hogshead.
8			
252	$31\frac{1}{2}$		
504	63	2	

Not. Ein Barrel Wein hält nur $31\frac{1}{2}$ Gallon, Weiß-Bier 32, Hopffen-Bier 36. * *

Ein Gallon Wein hält 231 Cubic-Zoll.

- - - Regen-Wasser 8 Pfund, 1 Untze, 11. Drachm. Averdupois.

* vid. Herr Prof. Hasii Pythometria p. 11.

** Ed. Wels, in Arithm. num. & spec. Append. II. p. 216.

Ein Gallon Regen-Wasser hält 9 Pfund, 10 Unz. 10 gr. Gran Troy.

Ein Gallon Bier (beyderley) hält 282 Cubic Zoll. *

- - - - Regen-Wasser 10 Pfund, 3 Unz. 426 Averdupois.

Ein Hogshead hält 10 Cubic-Schuch, oder schärffer: 10, 287 Cubic-Schuch.

177. XXI. Täflein zu Papier-Rechnung.

Bogen.			
25	Buch.		
500	20	Rieß.	
5000	200	10	Ballen.

Von Abtheilung der vornehmsten Müntzen.

178. XXII. Täflein von hiesiger Geld-Rechnung.

Heller.							
2	Pfennig.						
24	12	Groschen.					
384	192	16	Kayser Gulden.				
504	252	21	$1\frac{5}{16}$	Meißnische Gülden.			
576	288	24	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{7}$	Thaler.		
768	384	32	2	$1\frac{1}{2}\frac{1}{1}$	$1\frac{1}{3}$	Spec. Thlr.	
1440	720	60	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{6}{7}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$	Neu-Schock.

* Vid. Rich. Blome Gentlem. Recreat. p. 141.

179.

179. XXIII. Täflein zur Frantzösischen Geld-Rechnung.

Pites.					
2	Oboles.				
4	2	Deniers.			
48	24	12	Sols.		
960	480	240	20	Livres.	
2880	1440	720	60	3	Ecu.

180. XXIV. Täflein zur Englischen Geld-Rechnung.

$\frac{1}{4}$ Penn.					
4	Pennings.				
48	12	Shilling.			
320	80	$6\frac{2}{3}$	Noble.		
640	160	$13\frac{1}{3}$	2	Marc.	
960	240	20	3	$1\frac{1}{2}$	Pfund.

XXV. Täflein zum Gehalt der goldnen und silbernen Müntzen.

181. Man hat daher das Gold, wenn es seine höchste Vollkommenheit erreichet, auf 24 Carat gesetzet, wiewohl es so fein nicht heraus zu bringen ist, sondern der vierdte Theil vom Carat annoch ermangelt, es sey denn das

Philosophische Gold, welches so wohl an Farbe, als Reinigkeit höher hinauf steigen kan.

Das Silber hat seine Perfection nach dem löthigen Gehalt, dann so es 16 löthig, ist es aufs höchste gebracht, ob schon im feinesten Brand-Silber auch noch 1 oder 2 Grän desiderirt werden.

Reichsthaler Silber soll nach den Reichs-Satzungen 14 Loth und 4 Grän halten, so daher entstehet, weil die Ration des Kupffers gegen das Silber, wie 1 gegen 8 seyn soll, gleichwie der Ducaten und Rosenobel wie 1 zu 23. *

Einige geben dem Ducaten-Gold 23 Carat und 8 biß 9 Grän, den Rheinischen Gold-Gülden 18 Carat und 6 Grän, dem Cronen-Gold aber, (davon die Geschmeide und Halsketten gemacht werden,) nur 18 Carat. Die Louis d'Or, (deren $76\frac{1}{4}$ auf eine Marc gehen) halten 22 Carat, daß also der 12te Theil Zusatz gegeben. **

Grän.		
12	Carat.	
18	$1\frac{1}{2}$	Loth.
288	24	16 Marck.

* Also schreibet hiervon Dethl. Cluverus im Curiös. Welt-Mercurio Tom. II. p. 78.

** Eisenschm. de Pond. & Mens. pag. 5.

a.) Von der Addition der benahmten Zahlen.

182. Es wäre zu wünschen, daß man die Maase, Anmerck. Müntzen, Gewichte, und dergleichen Dinge bald anfangs in 10. 100. 1000. 10000 ꝛc. gleiche Theile eingetheilet hätte, denn also könten wir mit den Numeris concretis oder applicatis eben so leicht operiren, als wie mit den abstractis, und hätte es der obigen vielen Täflein gar nicht gebrauchet. Alleine wegen der nunmehr daraus entstehenden Confusion, und niemahls zuhoffenden Uebereinstimmung der Völcker muß es allerdings bey der alten Abtheilung sein Bewenden haben, und ist nun nicht auf das abstellen oder verändern, sondern vielmehr auf ein vortheilhafftes herstellen oder calculiren zu gedencken.

183. Dahero muß man in Zusammennehmung der grossen und kleinen Specierum so gleich auf eine leichte Art bestimmen können, wie viel eine Menge von kleinern zusammen genommen, gröffere Sorten ausmachet. Dieses heissen die Arithmetici sonst die simple Reduction, (dann die componirte gehört in die Operationes secundarias, (§. 83.) und deswegen ist es nöthig, selbige hier vorauszusetzen. Zusatz:

184. Nehmlich weil die Division lehret, wie offt eine kleinere Zahl in einer grössern enthalten ist, und 12 Pfennige einem Groschen gleich sind (178. XXII. Täfl.) so stecken auch so viel Groschen in einer grossen Anzahl Pfennigen, als die Zahl 12 in derselben Anzahl enthalten ist, (§. 69.) Derowegen muß man die Anzahl der Pfennige mit 12 dividiren, so giebt der Quotus die Groschen, (§. 122.) und das Residuum die übrigen Pfennige, (§. 143.) Als wenn Erläuterungs.

der Perpendicul der Pfennige nach geschehener Summation 158. Pfennige gegeben hätte, so dividirt man darein mit 12, kommen $13\frac{2}{12}$ gr. oder 13 Groschen 2 Pfennige. Wovon denn der Quot (hier 13.) zum folgenden Perpendicul der Groschen gezehlt, und der Rest unter den allbereit summirten Perpendicul gesetzet wird, damit nehmlich die Homonyma wieder untereinander kommen, (§. 87. No. 4.) auf welche Art man auch mit andern Münz- und Gewichts-Sorten ꝛc. zu verfahren hat.

Anmerck. 185. Wer offt und viel mit dergleichen Numeris materialibus zu thun hat, thut besser, wenn er sich einen Tarif z. E. von Pf. und gr. formiret, und sich denselbigen, wo es seyn kan, zugleich auch auswendig bekannt macht. Denn so wird er nicht allein einen grossen Vortheil im Addiren, sondern auch im Multipliciren und Dividiren empfinden, wo von unten mit mehren.

Es ist aber der Tarif zu hiesiger gewöhnlichen Geld-Rechnung folgender:

Gr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Thlr.
Pf.	12	24	36	48	60	72	84	96	108	
	24	48	72	96	120	144	168	192	216	Gr.

Worbey wahrzunehmen, daß die Indices die Decades, und die doppelten Indices die Unitäten zu denen Pfennigen geben, z. E. 4 Gr. machen

chen 40 und 8 oder 48 Pf. 7 Gr. geben 70 und 14, das ist 84 Pf. Und darff man nur die mittelste Reihe wissen, denn die unterste, als der mittelsten Dupla geben sich nachhero von selbsten. Hieraus kan man alsogleich z. E. 158 Pf. zu gr. machen, wenn man sagt: 15 Pf. sind 1 Gr. bleiben 3. und 38 Pf. sind 3 Gr. bleiben 2.

186. Denn ob zwar etliche im Zusammen zehlen nach und nach so viel kleine Species ausstreichen, als ihrer zusammen ein Gantzes von der grössern Sorte ausmachen, und davor allemahl einen Punct in folgende Reihen setzen, so will es doch nur in kleinen Abtheilungen und kurtzen Colomnen bequehmlich angehen, sintemahl es z. E. in Centnern, Pfunden, und Lothen, (wegen der in Gedancken zuverrichtenden Subtraction,) schon sehr beschwehrlich fällt. Anmerck.

187. Wer ein Liebhaber von Tabellen ist, und sie so gleich bey handen hat, kan in den practischen Büchern, als da sind, die expediten Rechen-Knechte, allezeit fertige Rechen-Meister, und dergleichen die kleinern Sorten aufsuchen, und alsofort die Grössern gegen über finden. Anmerck.

9. Aufgabe.

188. **Die benahmten Zahlen zu** addiren. 9. Aufgabe.

1.) Schreibe man die gleich benennten Dinge ordentlich unter einander, ziehe darunter eine Linie, fange von der kleinern Sorte an, und zehle sie (nach der 5 Aufgabe,) zusammen.

2. Schreibe man die Summe drunter, wenn sie noch nicht 1 oder mehr Gantze von der folgenden grössern Sorte austrägt.

3. So aber solche Summe, (wie mehrentheils geschiehet,) ein oder mehr Gantze von der nechst grössern Sorte in sich begreifft, behalte man sie entweder im Sinn, oder setze sie so lange bey Seite, reducire sie (nach vorhergehenden 184. und 185. §.) und schreibe den Rest unter die reducirte, den Quot aber zu der folgenden Sorte.

4.) Continuire man also durch alle Sorten biß zur letzten, deren Summe alsdenn keiner weitern Reduction von nöthen hat.

Einer hat gemessen aus	Dreßd. Ellen	Zoll
A in B - - - - -	2574 :	19
B in C - - - - -	6859 :	14
C in D - - - - -	4938 :	10
D in E - - - - -	1627 :	5
	Summa 16000 Ellen	
	oder eine Accis-Meile.	

Noch etliche Exempel:

Exempel. 189. Aus der Erfahrung hat man wahrgenommen, daß eine Kanne heiß Wasser leichter ist als eine Kanne kalt Wasser, und deswegen sind alle Liquores im Winter schwehrer, als im Sommer. Wolte man nun die differente Schwehre folgender Fluidorum zusammen wissen, so verfahre man nach dem VIII. Täflein (§. 164.)

Es wiegt nehmlich ein Pariser Würfflichter Zoll.

	im Sommer.			im Winter.		
	Unc.	Gros.	Grain.	Unc.	Gros.	Grain.
Mercurius	7	1	66	7	2	14
Oleum Vitrioli - -		7	59	- -	7	71
Spiritus Vitrioli - -		5	33	- -	5	38
Spiritus Nitri - -		6.	24	- -	6	44
Spir. Salis - - -		5	49	- -	5	55
Aq. fortis - - -		6	23	- -	6	35
Aq. Vitæ - - -		4	48	- -	4	57
Champ. Wein - -		4	66	- -	4	70
Bourg. Wein - -		4	67	- -	4	75
Spir. Vini - - -		4.	32	- -	4	42
Weiß-Bier - - -		5	1	- -	5.	9
Braun-Bier - - -		5.	2	- -	5	7
See-Wasser - -		6	12	- -	6	18
Fluß-Wasser - -		5	10	- -	5.	13
Summa	16.	1.	60	16:	3.	44

190. Nach den Experimenten, so in Engelland Wybard, Boyle und andere angestellet, verlieret ein Metall, so wie gewöhnlich in der Lufft 100 Pfund gewogen, als denn wenn es im Wasser, als einem dickern Fluido gewogen wird, ein merckliches * und zwar Exempel.

	Pfund.	Loth.	Grain.	
Das Gold	5	8	8	1
Mercurius.	7	11	14	34
Bley.	8	22	6	50 (2
Silber.	9	31	12	18
Kupffer.	11	3	10	2
Eisen.	12	16	—	39
	(2	(2		33 (2
				34
Summe:	54	29:	14	alle sechs zusammen.

* Dethl. Cluveri Nov. Crisis Temporum 1701. Tom. II. p. 91.

β.) Von der Subtraction der benahmten Zahlen.

Anmerck.

191. Wenn nur 2 Zahlen von einander weg zu nehmen seyn, braucht man zwar keine so grosse Reduction, doch aber vorhergehende Täflein, wo einem nicht allbereit auswendig bekannt ist, wie viel eine grössere Sorte, Stücke der kleinern in sich hält. Muß man aber viel kleine Sachen auf einmahl von einer grossen Post abziehen, da ist bißweilen eben auch die Reduction nöthig.

10. Aufgabe.

10. Aufgabe.

192. **Von einer grössern benahmten Zahl eine oder mehr kleinere zu** subtrahiren.

1.) Setze man die kleinere benahmte Zahl unter die grössere, iedoch also, daß die homonymischen Sorten unter einander kommen, (§. 93. No. 2.)

2.) So aber mitten oder am Ende von einer correspondirenden Sorte einesseits nichts vorhanden ist, da setze man dennoch in ihre Stelle einen Strich.

3.) Subtrahire man die Zahl der kleinern Sorte von der Zahl der correspondirenden obern, und schreibe den Rest darunter.

4.) Daferne aber oben zu wenig oder gar nichts ist, borge man bey der nechst grössern Sorte Eins, und, (so mans nicht schon weiß,) erfahre man den Valorem der geborgten Unität, aus dem dazu gehörigen Täflein, in

der

der nechst kleinern Sorte, und so dieser Valor noch nicht mit der untern Zahl, homonymisch ist, muß man von ihm noch eine Unität borgen, biß man nehmlich alsdenn von derselben neuem Valore kan abziehen.

5.) Subtrahire man von dem nunmehr gefundenen Valore der geborgten Unität die untere Zahl, addire dasjenige, so oben drüber stehet, also gleich mit zum Rest, und setze die Summe darunter, und so verfahre man auch mit folgenden Sorten.

6.) Soll man aber mehr kleinere Zahlen von einer grössern auf einmahl subtrahiren, so bringt man sie erst in eine Summe (nach der 2 und 9. Aufgabe §. 87 und 188.) und subtrahiret alsdenn die Summe. (nach dieser Aufgabe.)

Exempel auf

No. 1. und 3.

	Thlr.	Gr.	Pf.
Einer hat baar:	576	18	9
zahlt davon:	253	13	6
so behält er:	323	5	3

No. 1. 2. 4. 5.

	Cent.	Stein.	℔	Loth.
Von : : : :	11	3	--	--
sind abgewogen:	6	4	16	12
So bleibet noch:	4	3	5	20

No. 6.

Nach dem Transact. Angl. No. 185. sind der Inwohner in London:	695718.
in Paris.	488055
Rouen.	80000
Rom.	125000
	693055

Sind also in London dennoch 2663 mehr Menschen, als in den nachhero beniehmten 3 Städten.

Noch einige Exempel:

Mr. Dodart. D. Med. und Mitglied der Königl. Societät in Franckreich war beym Anfang der Fasten:

	116. Livres	1 Once schwehr,
am Oster-Sonnabend woge er nur:	107. L.	12 Onces
so hat er (nach) den IV. Täflein §. 164.) in 46 Tagen abgenommen:	8 Livres	5. Onces

Nach Ostern aber erlangte er diese 8 Pfund und 5 Unzen in 9 Tagen wieder. *

Die Sonne läufft	Tage	Stunden	Min.
von ♈ biß in die ♎	186	18.	30
von der ♎ biß in ♈	178	11	19
So ist ein halb Jahr länger als das andere:	8,,	7,,	11

Der halbe Diameter der Erd-Kugel	Pariser-Schuh.
von Morgen gegen Abend ist lang:	19767630
und von Mittag gegen Mitternacht:	19609820
Folglich ist die Erde höher um Æquatore als unter den Polis:	157810 **

* Vid. Herrn Hoff-Rath Wolffii Gedancken von Würckungen der Natur pag. 44. und 45.

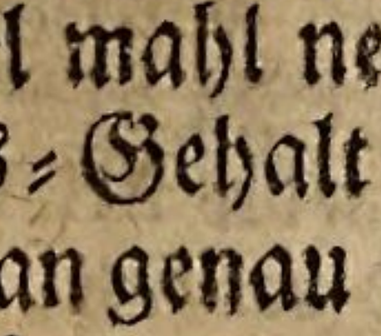
** Newtoni Princ. Phil. Nat. Mathem. pag. 387.

Wie

Wie man von einer Zahl viele kleinere, und sogleich iede besonders abziehen könne, wird unten in denen Compendiis Operationum angewiesen werden.

7.) Von der Multiplication in benahmten Zahlen.

193. Weil eine benannte Zahl nichts anders ist, als eine benannte Einheit viel oder wenig mahl genommen, und der Unicäts-Gehalt nach einer blossen oder puren Zahl begriffen wird, (§. 8 und 18.) so heist eine benannte Zahl mit einer benannten Zahl multipliciren, die eine so viel mahl nehmen, als es der andern ihr Einheits-Gehalt erfordert, (§. 96.) das ist, wenn man genau reden will, als es eine blosse Zahl erfordert. Erklär.

194. Dahero wenn man z. E. 3 Ruthen mit 2 Ruthen multipliciret, so klingen zwar die Zahlen durch aus benahmt, es bedeutet aber nicht mehr, als wenn man 3 Ruthen mit der simplen Zahl 2 multipliciret. Es wäre denn, daß man mit solcher Redens-Art ein Flächen-Maaß:  wolte andeuten, und da ist sie alsdenn gar nöthig, sintemahl man es sonsten mit dem Längen-Maaß (von 6 Ruthen) confundiren könte. Denn also involviret ein Numerus applicatus in applicatum ductus allerdings eine Flächen-Zahl, als 3 Thlr. 4 Gr. mit 2 Thlr. 3 Gr. oder 76 Gr. multiplicirt mit 51 Gr. geben: 3876 Grosch.(.) Groschen, oder 3876. Quadrat-Groschen. (§. 109. No. 2.) Nehmlich eine ablange Fläche, worauf man nach der langen Seite so vielmahl 3 Thlr. 4 Gr, oder 76 Gr. unter einander Reihenweise hinzehlen kan, als auf der kurtzen Seite die andere Zahl, 51 Groschen, die Einheit von 1 Groschen, nehmlich Zusatz.

lich 51 mahl, in sich begreiffet. Wie es denn bald in der Multiplication der Brüche und weiter unten erhellen soll, daß $3\frac{1}{6}$ Thlr. mit $2\frac{1}{8}$ Thlr. multiplicirt, nichts anders geben, als 6 Quadrat-Thaler (ieder zu 24 mahl 24, oder 576 Groschen gerechnet) $\dagger\frac{2}{6}\dagger\frac{3}{8}\dagger\frac{1}{48}$ das ist: $\dagger\frac{3}{4}\frac{5}{8}$ Quadrat-Thaler, oder 420 Groschen.

Zusatz. 195. Ja man siehet auch hieraus, daß gleicher gestalt die Homonymia zu den multiplicirenden Zahlen erfordert werde, indem die ungleichbenannten z. E. 3 Ellen mit 2 Zoll multiplicirt, weder 6 Ellen noch 6 Zoll herausser bringen, wie oben im 109 §. No. 1. schon erinnert.

Anmerck. 196. Es gehören aber eigentlich die Multiplicationes der benannten Zahlen, (so weit sie es würcklich sind,) in die Geometrie, als worinnen die Grössen 2 biß 3 Dimensiones haben können, da hingegen in der Arithmetic und Algebra solcherley Grössen an und vor sich, angesehen werden, als wenn sie nur eine Dimension hätten. *

Einwurff. 197. Wieder dieses alles aber möchte iemand einwenden, daß es in der Proportion-Rechnung nichts neues sey, daß man Cubic-Schuh mit Pfunden, Tage mit Meilen, Flächen mit Längen, ꝛc. und also nicht allein benahmte, sondern so gar auch ungleichbenahmte Zahlen in einander multiplicire, welches also dem 109. und vorigen §§. allerdings zuwieder lieffe.

Beantwortung. 198. Dem dienet aber zur Antwort, daß solches in der Vergleichung der Sachen nur zu geschehen scheine, in der simplen Multiplication aber gar nicht geschehen dürffe. Denn wenn man setzet, daß z. E. ein Pariser Cubic-Schuch Wasser 72 Pfund wäget, und das Gewichte von 63 Cubic-Schuch verlanget wird, so multipliciret man 63 Cubic-Schuch nicht mit 72 Pfund, son-

* Hiervon besehe man mit mehren Herrn Prof. Hasii Dissert. de Nihilo Mathem. pag. 4. §. 16. 17. desgleichen am Ende §. 138.

dern

dern nur mit der blossen Zahl 72. Nehmlich so es heist:

Cubic-Schuch.	Pfund.		Cubic-Schuch.	Pfund
1	wäget 72	was wägen	63	fac. 4536.

hätte man lieber die Terminos homonymos sollen zusammen setzen, und inferiren:

Cub. Schuch.	Cub. Schuch.	Pfund.	Pfund.
Wie 1	gegen 63	also auch 72	gegen 4536,

allwo man nicht so wohl die Cubic-Schuch gegen die Pfunde, sondern nur die Verhältnis, so zwischen denen Cubic-Schuhen ist, mit der Verhältnis, die zwischen den Pfunden ist, vergleichet, * das ist, wie hier 63 Cubic-Schuch 63 mahl mehr sind, als 1 Cubic-Schuch, so muß man auch die dritte Zahl 72 Pfund, 63 mahl grösser als Eins nehmen, und sie also bloß mit 63 multipliciren, (§. 96.) Denn also verhält sie sich eben so gegen die vierdte, wie die erste zur andern, so unten in der Doctrina Rationum auch noch soll klärer werden.

11. Aufgabe.

199. **Die benannten Zahlen zu multipliciren.** 11. Aufgabe.

1.) Wenn dieselben, wie auch der Multiplicator, nicht gar zu groß, fange man von der kleinen Sorte an, multiplicire sie, (wie auch hernach die folgenden) besonders, (nach der 7 Aufgabe §. 115.) und reducire, wo es nöthig, die Facta auf die nechst grössere Sorten, (§. 184. 185.)

2.) Wo aber der multiplicans aus mehrern Ziffern bestehet, verwandele man die grössern Sorten, (so nehmlich nach der allergrösten folgen) in die gegebene kleineste, multi-

* Wie solches also ausdrücklich erkähret Wallisius Op. Arithm. Cap. 37.

plicire die gröste, wie auch die also verwandelten kleinsten, reducire das letzte Product auf die folgenden Grössern, und addire beyde Facta zusammen.

Exempel auf No. 1.

Ein gemeiner Stein von 80 Pfund 6 Loth wäget im Wasser nur:

Pfund.	Loth.	Qv.
36	16	2
255 Pf.	19 Lo.	2 Qv.

(7

Nun hat man dergleichen Stein, so 7 mahl so schwehrist, wie viel wäget er im Wasser?

Not. Der gemeine Stein nimmt im Wasser mehr, als die Helffte von seiner Schwehre ab, und verhält sich sein Gewicht in der Lufft zu seinem Gewicht im Wasser wie 10000 gegen 4554.

Exempel auf No. 2.

Man multiplicire 253 Thlr. 15 Gr. 11 Pf. mit 748 Centnern, das ist, mit der blossen Zahl 748.

	Thlr.	Gr.	Pf.
748	à 253	15	11

748 (191

6732
748

191.

x428868 (xx9005 (496:1:8

12) 20 x 24) 33.41

x x x x

748

748 (253
2244
3740
1496

189244
496: 1: 8

facit. 189740 Thlr. 1 Gr. 8 Pf.

200. Es ist nicht zu läugnen, daß solche Art der Vermehrung etwas langweilig und verdrießlich fält, alleine man muß diese so lange gebrauchen, biß es in Compendiis Operationum einige kürtzere giebt. Zudem ist es auch gut, denen Anfängern eine allgemeine und leichte, ob schon etwas weitläufftige Regul zu geben, denn wenn sie die schwehrern und kürtzern vergessen, (wie es iezuweilen geschiehet,) können sie sich doch im Nothfall indessen mit dieser behelffen. Anmerck.

d.) Von der Division der benahmten Zahlen.

201. Hier wird wenig zu erinnern seyn, denn so man die Multiplication verstanden, geben sich die Reguln zur Division von selbsten, allermassen iedwedes Factum mit einem Efficiente dividirt, so gleich den andern Efficienten wieder herstellet, und das Dividiren nur wieder auseinander setzet, was die Multiplication zusammen genommen. (s. 124.) Anmerck.

202. Derowegen da eine benahmte Zahl mit einer blossen multiplicirt, (das ist, etliche mahl gesetzet s. 97.) wieder eine benahmte giebt, (s. 193.) so bringt auch eine benahmte mit einer

{ blossen / benahmten } dividirt wieder eine { benahmte / blosse.

Z. E. 6 Groschen 4 Pfenige mit 2 dividirt, giebt 3 Gr. 2 Pf. und 6 Gr. 4 Pf. mit 3 Gr. 2 Pf. dividirt bringt 2. Denn eben so kommt es, wie sichs in der Division gehört, Erläuterung.

nehmlich im ersten Fall, wie der Dividendus gegen den Quotum, also auch der Divisor gegen Eins, und im andern Fall, wie der Dividendus gegen den Divisorem, also auch der Quotus gegen Eins (§. 125.)

Anmerck. 203. Auch siehet man hieraus, daß man die gleichbenannten Zahlen, so wohl mit ihren Zehlern, als auch mit ihren Nennern in einander dividiren kan, als in obigen

Pfennige Pfennige Pf. (:) Pf.

Exempel: 76 mit 38 divid. bringen 76 (:) 38 $= \frac{1}{2} = 2$ wie solches auch nach dem 137. §. erfordert wird.

12. Aufgabe.

12. Aufgabe. 204. **Die benannten Zahlen zu dividiren.**

1.) Man dividire zuerst in die grössere Sorte, (ist sie aber nicht groß genung, so wird sie gleich in die folgende kleinere Sorte resolvirt, und alsdenn darein dividirt,) was kömt, setze man hinter eine lange Linie als Quotum, den Rest aber, (wenn einer bleibt,) reducire man auf die folgende geringere Sorte, addire derselben Anzahl dazu, und dividire in die Summe alsdenn mit dem gegebenen Divisore vom neuen wie zuvor, u. s. w.

2.) Bleibt aber kein Rest übrig, so muß man in die Anzahl der nechst geringern Sorte a parte dividiren.

Exem-

Exempel auf No. 1.

α.) Es sollen 255 Pf. 19 Lo. 2 Quentlein in 7 gleiche Theile getheilet werden, was kommt auf $\frac{1}{7}$? Fac. 36 Pf. 16 Loth 2 Qv.

Pf.	Lo.	Qv.
255		
(7 43	" 19 "	2
3 2		
36 Pf.		
115		
43	16 Loth.	
4		
14	2 Qv.	

β.) Gesetzt, ein Mensch sey schwehr 1 Centner 25 Pfund 12 Loth, und alle Nacht transpirire er 2 Pfund 12 Loth, (denn Sanctorius in seiner Medicina Statica hat observiret, daß man wohl 40 Unzen oder 80 Loth auszudünsten pflege. * In wie viel Wochen transpiriret er so viel, als er schwehr ist?

Man dividire 1 Cent. 25 Pf. 12 Lo. mit 2 Pf. 12 Loth.

135

282 (32

405

4332 (57

76) 84 1 (8 Wochen 1 Nacht.

8 7)

Auf No. 2.

Es beträget eine Massa oder Composition von unterschiedenen Ingredientien in allen 12 Pfund 10 Unc. 4. Drachm. und am Gelde 23. Thlr. 18. Gr. 9 Pf. Nun wolte iemand dergleichen weniger und wohlfeiler machen lassen, nehmlich nur den 6ten Theil so viel, wie schwehr und wie theuer wird sie kommen?

* Sanctorius in Medicina Statica pag. 12.

Pf.	Unc.	Qv.
ɪ ℥	11 10	4
6) 4	2 Pf.	
8		
℥ 6	1 Unc. 6 Drachm.	

Thlr.	Gr.	Pf.
23	18	9
6) 5		
24	3 Thl.	
ɪ ℥ 8	23 Gr.	
ɪ	1 3/6 Pf.	

3. Von den Speciebus der indeterminirten oder unabgetheilten Zahlen.

Anmerckung. 203. Was die indeterminirten Zahlen seyn, und wie ihre Rechnung weit höher, als die gemeine zu halten, ist oben im 51. 52. und 53. §. allbereit angezeiget worden. Es ist aber von ihren *Expressionen*, Zeichen, Bedeutungen und Unterscheid erst ein und das andere zu erinnern, ehe sich die Operationes mit denselben recht deutlich begreiffen lassen.

Anmerck. 204. Wenn man eine Linie, Gewicht ꝛc. mit einer gemeinen Zahl will andeuten, so muß man zuvor wissen, wie viel sie z. E. Zoll, oder wie viel es Pfund halte. Denn die gemeinen Zahlen erfordern allezeit eine determinirte Angabe des Mases gegen das gemeßene, hingegen ist dis bey einer unabgetheilten Zahl nicht nöthig, denn sie beziehet sich auf keine fest gesetzte, sondern auf eine willkührlich anzunehmende Unität, nach welcher man den Gehalt der Dinge bestimmen kan, und weil dieses bey allen Grössen angehet, so hat man auch dergleichen indeterminirte Zahlen überhaupt Quantitates oder unabgetheilte Grössen genennet, so sich wie andere, gleicher Gestalt vermehren und vermindern lassen.

Satz. 205. Statt der Ziffern, womit man sonst andere exprimirt, bedienet man sich der Buchstaben aus dem Alphabeth: a, b, c, d, &c. Denn weil wir solche Figuren

ren am besten kennen, wäre es wohl unrecht gewesen, wenn man erst neue dazu hätte inventiren und mercken sollen.

Anmt. und Eintheilung.

206. Nun lässet sich der Gehalt einiger Grössen gar balde finden, wenn man nur das willkührlich angenommene Maaß bey denselben würcklich appliciren kan, z. E. ein Cörper zeigt seine Schwehre gar leichtlich, wenn man ihn nur unter Händen haben, und wägen kan, hingegen lässet sich der Gehalt etlicher Grössen offt schwerlich finden, theils weil man ein genommenes Maaß bey denselben nicht so gleich anzubringen vermag, z. E. wenn man die Höhe, Grösse, oder Schwehre einer Wolcke will untersuchen. * theils auch, weil solcher Gehalt fast alle Augenblicke verändert wird, z. E. die Kräffte in den fallenden Cörpern, die Ordinaten in Lineis curvis &c.

Satz.

207. Die erste Art Grössen, nehmlich die gegebenen, oder doch leicht auszumachenden, bemercket man mit den ersten Buchstaben des Alphabets: a, b, c, d, m, n, r &c. Die andere Art aber, nehmlich die gesuchten, veränderlichen, oder schwehr auszumachende Grössen, deutet man an mit den letzten Buchstaben: v, x, y, z.

Ja die neuern Autores benennen auch die Grössen mit ihren ersten Nahmens-Buchstaben, als die Masse eines Cörpers mit M, dessen Geschwindigkeit mit G, dessen Schwehre mit S, dessen Krafft mit K &c. und exprimiren aus etlichen gegebenen die Natur der übrigen.

Anmerck.

208. Und in solcherley Benennungen muß man sich gleich anfangs vorsehen, damit diejenige, so durch unterschiedene Kenntnisse begriffen, auch durch unterschiedene, iedoch schickliche und leichte Expressionen oder Signa vorgestellet werden. Denn einerley Buchstaben bedeuten lauter gleiche, und unterschiedene bemercken ungleiche, zum wenigsten so lange, biß es nach geschehener Untersuchung erst ausgemachet wird.

* Vid. Herrn Prof. Thümmigii Nephelemetria, sive de Pondere Nubium. Hal. 1722.

Satz. 209. Die Zeichen behält man meistentheils, so man in den Operationen der blossen Zahlen gebraucht, nehmlich + ist das Signum Additionis, — Subtractionis, ± oder ∓ Ambiguitatis quantitatum, (±) Ambiguitatis Signorum, die Nebeneinandersetzung, ein Comma (,) ein Punct (.) oder auch ein liegend C (⊃) ist ein Zeichen der Multiplication, in welcher der Multiplicator vorher, und der Multiplicandus hinter drein geschrieben wird. Das Signum Divisionis ist entweder eine Bruchs-Andeutung, als: $\frac{a}{b}$, Nehmlich a dividirt mit b, (oder so man will: ^{b}a, wovon in Brüchen mit mehren,) oder es sind es auch zwey Puncte (:) vor welche der Dividendus, und nach welchen der Divisor gesetzet wird, als a : b, und so man a : b wieder mit c dividiren soll, schliesset man die vorigen in eine Parenthesin ein, als (a : b) : c. Denn ob es schon auch simpler, nehmlich durch a : b c hätte können angedeutet werden, so ist es doch nicht nöthig manche actu zu dividiren, und sie aus ihrer Gestalt aus einander zu reißen.

Satz. 210. Nachdem aber dergleichen unabgetheilte Zahlen zuweilen auf vielerley Art zusammen oder von einander genommen worden, so ist auch nöthig, daß man die combinirte und separirte, wie auch die eintzele nicht mit einander confundire, und deswegen sind noch etliche höchstnöthige Zeichen zu mercken, so man Vincula oder Bande nennet. Diese kommen insgemein in der Multiplication und Division vor, und werden in die einfache und vielfache *Vincula* abgetheilet.

Erklärung. Die einfache bestehen nur aus einer einfachen Linie oder Parenthesi, als da sind:

$$\overline{c.\ a+b} \quad \text{oder} \quad c(a+b) \quad || \quad \overline{d+e\ .\ m+n-r}$$

$$\text{oder} \quad (d+e)\ .\ (m+n-r)$$

Die vielfachen aber, so man Vincula in Vinculis nennet, bestehen aus doppelten Linien oder Parenthesibus,

z. E.

z. E. a.b c+e.f+g oder a ((b c+e (f+g)) &c. *

211. Die Linien, weil sie zwischen den Zeilen ziemlichen Platz einnehmen, auch im drucken leichtlich zu lang oder zu kurtz genommen werden, sind nicht sonderlich mehr im Brauch, und bedienet man sich also lieber der Parenthesium. Anmerck.

212. Was den Valorem der Buchstäblichen quantitäten anbelanget, so bemercken diejenige, die das Signum + oder gar keines vorhero haben, eine würckliche Quantität, die auf einer Seite vorhanden ist, hingegen bedeuten solche, so das Signum — vorhero haben, nicht etwa ein Non-Ens, das nur in cerebro Mathematicorum existiret, sondern eine solche Grösse, die bey einer gewissen Sache nicht vorhanden ist, die an oder über einen gewissen Ort nicht angetroffen wird, deswegen sie aber doch gar wohl an einem andern Orte seyn kan. Erklär.

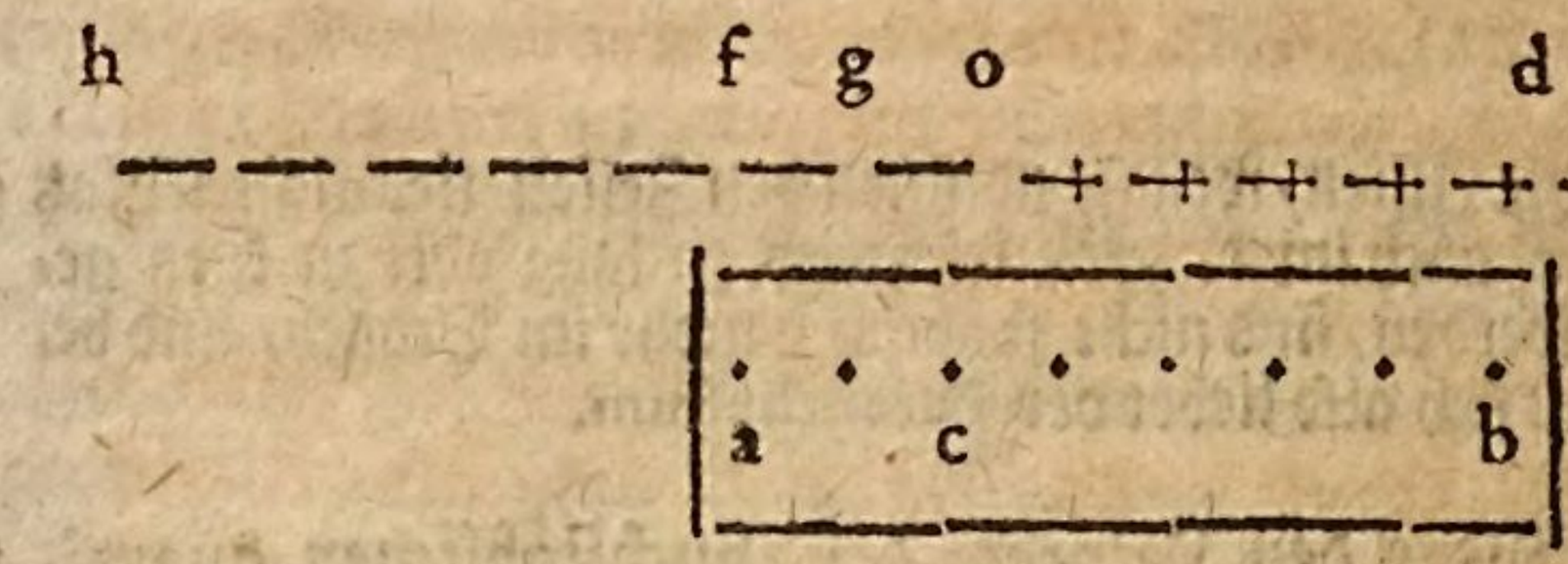
213. Man nennet die erste Art quantitates positivas oder affirmativas, und die andere privativas, oder negativas, iedoch muß man die letzten so erklähren, daß nehmlich negativæ seyn, non, quæ existentiam, sed quæ præsentiam negant. Erklär.

214. Der Herr de Crousaz beschreibt sie als solche Entfernungen, womit man von einem gesetzten Termino oder Puncto so weit herunter gehet, als man mit denen so † haben, darüber hinauf steiget. Und wie eine Entfernung kan mehr oder weniger groß seyn, also ist die Entfernung einer Quantität, an und vor sich selbst schon eine Quantität, die man nehmlich vermehren und vermindern kan. ** 1. Erläuterung.

* Wie denn solches meist alles More Leibnitiano exprimiret, und in Miscellaneis Berolinens. T. I. in Monito de Charact. Algebr. p. 157. seq. noch mehr davon zu befinden.

** Vid. Mons. de Crousaz Traité de l' Algebre pag. 5. 6. 9. seqv.

2. Erläuterung. 215. Dieses ist sehr deutlich in Linien wahrzunehmen, wenn z. E. ein Fischer mit seinem Kahn



in a bey o stehet, und darinnen aus a nach b 7 Schritte läufft, in Willens am Ufer etwas aus e hinweg zu nehmen, der Kahn aber in wehrenden 7 Schritten von dem Ort o nach f allmählig 2 Schritte fortschwimmet, so bemercken sich zwar alle Schritte des Fischers, (als hier 7,) so rechter Hand nach e gehen, mit dem Signo +, und sind eigene Bemühungen nach e, der Weg aber von 2 Schritten, den inzwischen der Kahn mit samt dem Fischer von o gegen f schwimmet, gehet lincker Hand, und bemercken sich solche Schritte mit dem Signo — denn sie bringen durch die gemeinschafftliche Bewegung den Fischer zurücke, also da die eigene Bewegung des Fischers + 7 und die Gemeinschaffliche — 2, befindet sich der Fischer nach Endigung seiner 7 Schritte nur bey d, und hat in der That nur so viel, als 5 Schritte aus o gegen e avancirt.

Zusatz. 216. Dahero sind solche Entfernungen zur lincken so gut reell, als die zur Rechten, immassen man des Kahns Bewegungen mit +, und des Fischers besondere mit — hätte exprimiren können, wenn man anfangs gewolt hätte.

Zusatz. 217. Und da solcherley Quantitates negativæ algebraicæ, numericæ concretæ, geometricæ und Logarithmicæ immerzu reales seyn, * so können sie auch mit den positivis verrechnet werden.

* Wie solches alles in oben belobter Dissertation de Nihilo Mathematico des Herrn Prof. Hasii reichlich ausgeführet.

218. Endlich ist noch ein Unterscheid zwischen den Exklär: unabgetheilten Zahlen zu mercken, denn diejenigen, so kein Signum zwischen sich haben, heissen quantitates simplices oder incomplexæ, (einfache Grössen) als 1, 5b mx y^3 -c -3d die aber, zwischen welchen das Signum + oder — stehet, heissen quantitates compositæ oder complexæ, (zusammen gesetzte Grössen,) z. E. a+b. e+f-g 3x+2b-4c, die gemeinen Zahlen, als hier 3, 2, 4 sind die Zehler, (so die meisten Autores Coëfficientes heissen,) und x, b, c sind die Nenner, (§. 18.)

119. Im weitläufftigen Verstand heist a+b ein Binomium, a+b+c ein Trinomium, a+b+c+d+e, ein Polynomium, welche beyde letztere offt auf Binomia reducirt werden. Jugleichen heist also a—b ein Residuum. Im engern Verstand aber muß bey einem Binomio und Residuo, welches letztere sonst auch Apotome genennet wird, wenigstens eine Irrational-Grösse seyn, wovon unten. Anmerck.

220. Wenn nach obiger Bedingung in vorhergehender Figur (§. 215.) in wehrenden 2 Schritten des Fischers aus a in c, der Kahn just auch 2 Schritte von o in f fort gienge, so bliebe der Fischer bey o bestehen, und avancirete also nichts über o nach e, dahero machen einerley negativa mit einerley positivis zusammen o, als —2+2=o oder 2a—2a=o. Anmerck.

121. Thäte aber der Fischer (in a bey o stehend) gegen e nur einen Schritt, da immittelst der Kahn 2 Schritte nach f avancirte, so käme dieser Mensch nur bey g, und gienge sein avancement, so von o gegen e geschehen sollen, um Eins zurücke, und wäre =—1, also daß +a—2a= —a. Anmerck.

222. Wer diese 2 Casus, wie auch den obigen §. 215. genau betrachtet, wird gar leichte den Grund sehen, worauf sich die Addition der negativen und positiven Grössen stützet. Anmerck.

223. Nehmlich das Hinzuthun einer negativen Quantität, ist nichts anders, als eine Hinwegnehmung einer so grossen positiven, und vice versa.

13. Aufgabe.

13. Aufgabe.

224. Die Quantitäten, so mit einerley oder auch unterschiedenen Zeichen bemercket seyn, zu addiren.

Vor allen Dingen ist noch beyzubehalten, wenn vor einer Quantität kein Zehler stehet, ist es so viel, als wann 1 davor stünde, (§. 18.)

Auflösung.

1.) Die gleichbenahmten Zahlen, so einerley Zeichen haben, addire man wie gewöhnlich, nehmlich man zehle ihre Zehler zusammen, und schreibe die Nahmen mit eben dem Zeichen darneben.

2.) Die aber verschiedene Zeichen, und zugleich einerley Zehler haben, addire man gar nicht, und schreibe auch nichts drunter.

3.) Haben sie verschiedene Zeichen und auch verschiedene Zehler, so subtrahire man den kleinen von grössern, und setze zum Rest das Zeichen des grössern.

4.) Die ungleichbenannten setze man nur mit ihren Signis zusammen, und wo kein Signum vorher stehet, wird + darunter verstanden. (§. 212.)

Exem-

Exempla Additionis auf

No. 1.

	Erläuterung durch benahmte Zahlen.
$3a + b - c$	3 Thl. und 1 Gr. weniger 1 Pf.
$4a + 5b - 2c$	4 Thl. und 5 Gr. weniger 2 Pf.
Summa $7a + 6b - 3c$	7 Thl. und 6 Gr. weniger 3 Pf.

Man kan sie aber auch durch beliebige blosse Zahlen erläutern, als es sey z. E.

$$a = 6, b = 5, c = 3, d = 2$$

No. 1. 2 und 3.

$a - 2b + 7c + d$	$6 - 10 + 21 + 2 = 19$
$4a + 2b - 3c - 2d$	$24 + 10 - 9 - 4 = 21$
$5a + 4c - d$	$30 + 12 - 2 = 40$

No. 4

$4x + m$	4 Ducat. und 1 Thl. nebst 1 Gulden weniger 1 Gr. machen so lange 4 Duc. + 1 Thl. + 1 Gulden — 1 G. biß sie nach gutbefinden reducirt werden.
$y - n$	
$4x + m + y - n$	

Beweiß auf

No. 1.) Weil die Buchstaben unabgetheilte Zahlen seyn, (§. 205.) so nimmet man ieden vor Eins, (§. 1.) und da nur homonyma können zusammen genommen werden, muß man gleiche unter gleiche setzen, ihre Zehler gewöhnlich summiren, und die Nahmen dabey behalten, (§. 85.)

No. 2.) Sind die Quantitates negativæ und positivæ gleich groß, so machen sie nichts, (§. 220.) welches auf dem leeren Papier schon da stehet.

No. 3.

No. 3.) Ist eine kleinere negativa mit einer grössern positiva zu addiren, so wird solche positiva um so viel kleiner, als der Abgang in contrarium austräget, (§. 215.) So aber eine grössere negativa mit einer kleinern positiva zusammen gezehlet wird, dann wird die negativa um so viel kleiner, als die positiva avanciret, (§. 221.)

No. 4.) Indem die ungleichbenanten Dinge eigentlich nicht zu addiren stehen, so deutet man indessen nur an, daß man sie zusammen setzen wollen.

Lehrsatz. 225. Wenn ein Abgang oder eine quantitas negativa soll abgezogen werden, so wird sie eine eben so grosse positiva, und wächset also derjenigen, von welcher man sie soll abziehen, würcklich zu. Z. E. die 2 Schritte Entfernungen über o zur Lincken, (in der Figur des 215. §.) abziehen oder weglassen, ist nichts anders, als 2 Schritte zum Avancement nach e mit beytragen. Denn einen Abgang weg nehmen, ist eben so viel, als ihn suppliren, oder so viel addiren. Demnach machen $-2b$, wann sie von $5b$ subtrahirt werden, $+2b+5b = 7b$, (§. 224. No. 1.) Oder $-(-2b)$ sind $= +2b$, eben so, wie die Lateiner mit 2 Negationen etwas affirmiren, und auf gleiche Weise ist b, wenn davon $-d$ subtrahiret wird $= b+d$.

14. Aufgabe.

14. Aufgabe. 226. Die unabgetheilten Zahlen, so einerley oder verschiedne Zeichen haben, von einander zu subtrahiren.

1.) Setze man diejenigen, von denen man will abziehen, zu oberst, und die, so abgezogen sol-

sollen werden, unten drunter, iedoch so, daß die **gleichbenannten**, so viel sie zureichen, unter einander kommen.

2.) Haben nun diese **einerley** Signa, so subtrahire man nur ihre **Zehler** von einander, und setze die **Nahmen**, oder **Nenner** daneben.

3.) Ist aber der untere **Zehler** grösser, als der obere, (wie es vornehmlich in componirten Grössen gar offte geschiehet,) so subtrahire man den obern vom untern, und setze zum Rest ein contraires Zeichen.

4.) So die Signa **unterschieden** sind, nehme man **beyde Zehler** zusammen, und setze zu ihrer Summe das Zeichen der obern.

5.) Endlich so die Quantitäten **von ungleichen Benennungen** sind, so gebe man denen, die man soll abziehen, contraire Zeichen, und setze sie neben einander.

Exempla Subtractionis auf No. 1 und 2.

$7b-5c+3d$	Einer hat bey sich gehabt:
$3b-2c+d$	7 Thl. weniger 5 Gr. u. noch 3. Pf. davon
	3 Thl. weniger 2 Gr. u. 1 Pf.
$4b-3c+2d$	Bleibt 4 Thl. weniger 3 Gr. u. noch 2 Pf.

No. 3.

$6a+5b-3c+d$	$36+25-9+2$	$=54$
$a+7b-4c+2d$	$6+35-12+4$	$=33$
$5a-2b+c-d$	$30-10+3-2$	$=21$

No. 4

No. 4.

Hiervon

$$\begin{array}{r|l} 5a+2b-c+3d & =43 \\ 2a-b+3c-2d & =12 \\ \hline 3a+3b-4c+5d & =31 \end{array}$$

Von einem Getrände Vorrath	Malt.	Scheffel	Viertel	Metze
sind aufgangen:	9 weniger	2	0 und	1
	6 und	1 weniger	3 weniger	2
So bleibt noch Bestand:	3 weniger	3 und	3 und	3

Notand. Wenn oben eine o stehet, ist es so viel als stünde ihr + vor.

No. 5.

Von $a+b-c$
Subtr. $a-d+f$
Restirt. $b+d-c-f$

Beweiß von

No. 1 und 2.) Daß man die kleinern Zehler gleichbenahmter Dinge, von denen darüber stehenden grössern Zehlern also müsse abziehen, ist (oben aus 93 und 94. §.) bekannt.

No. 3. Daß aber unter den positivis ein grösserer Zehler von einem kleinern abgezogen, so viel weniger übrig lasse, als jener grösser ist, wie dieser, z. E. daß von $5b$ die hinweg genommen $7b$ nichts anders, als $-2b$ übrig lassen, ist leicht zu sehen. Denn $5b-7b$ sind gleich $5b$ wenn davon 7 abgezogen worden, (§. 221.) Nun aber sind $5b-7b \equiv 5b-5b-2b$ (§. 126. und 69.) Und $5b-5b \equiv 0$ (§. 220.) Demnach sind $5b-5b-2b \equiv 0-2b$ (§. 69.) $\equiv -2b$.

Glei-

Gleicher gestalt ist auch ohnschwehr zu erweisen, daß unter den negativis ein grösserer Zehler von einem kleinern abgezogen, um so viel mehr übrig lassen müsse, als jener grösser ist, wie dieser, z. E. Wenn man — 4*c* von — 3*c* subtrahiret, daß + 1*c* übrig bleibe. Denn die abgezogene negativa wächset derjenigen, von welcher man subtrahiren soll, würcklich zu, (§. 225.) Und demnach sind — 3*c* — (— 4*c*) = — 3*c* + 4*c* = 1*c* (§. 224. No. 3.)

No. 4.) Eine positiva von einer negativa abgezogen, macht den Abgang grösser, nehmlich so man von — *c* noch + 3*c* hinweg nimmt, kommt — *c* — 3*c* (§. 223.) Nun aber sind — *c* - 3*c* = — 4*c* (§. 224. No. 1.) Demnach giebt — *c* nach subtrahirten 3*c* noch einen stärckern Abgang, das ist: — 4*c*. Hingegen wenn eine negativa von einer positiva weggenommen wird, so suppliret man dadurch den erlittenen Abgang, und wächset sie der positiven würcklich zu, (§. 225.) Als wenn man von 3*d* noch hinweg nimmt — 2*d*, so werdens so viel, als 3*d* + 2*d* = 5*d*. (§. 224.)

No. 5. Die Hinwegnehmung einer positiven ist nichts anders, als ein Hinzuthun einer so grossen negativen, (§. 223.) Und die Hinwegnehmung einer negativen ist eine Anwachsung einer eben so grossen positiven quantität, (§. 225.) Demnach muß man

die Subtractiones der ersten mit — und der andern mit +, das ist mit contrairen Zeichen andeuten.

Anmerck. 227. Wenn man die Reguln der Subtractionis Literalis nebst ihren Beweisen überhaupt betrachtet, so siehet man aus den vielen Verwechselungē der Zeichen, daß man alle 5 Casus auf eine eintzige Regul reduciren kan. Nehmlich man gebe denen Quantitäten, so da subtrahirt werden sollen, durchgehends contraire Zeichen, und addire sie zu denen obern, (§. 224.) so giebt die Summe das Residuum. Z. E.

Subtr. verwandelt in die Addition:

$3a+2b-4d+c-m$	$3a+2b-4d+c-m$
$2a+3b+d-2c+n$	$-2a-3b-d+2c-n$
$a-b-5d+3c-m-n$	$a-b-5d+3c-m-n$

Anmerck. Ich wolte aber nicht gerne, daß sich iemand bloß allein an diese Regul gewöhnete, allermassen er sonsten in der Divisione Literali lange nicht so commod und hurtig wird zu recht kommen, als einer, der die ordentliche Subtraction nach obigen Fällen wohl inne hat.

Anmerckung und Erklärung. 228. Weil die neben einander gesetzte Quantitäten anzeigen, daß die eine so viel mahl genommen sey, als die andere Einheiten hat, (§. 76. und 96.) so giebt diejenige, die so und so vielmahl genommen worden, den Nahmen, die andere aber, welche mit ihrem Einheits-Gehalt abzehlet, wie vielmahl jene zu nehmen, nöthig gewesen, giebt den Zehler. (§. 16. 17.) Und demnach bestehen auch diese multiplicirten Grössen aus ihrem Zehler und Nenner, z. E. $3b$ hat zu seinem Zehler 3, und b zu seinem Nenner, $4ac$ hat 4 zum Zehler, und ac zum Nenner, mpx in pur-analytischen hat m zum Zehler, und px zum Nenner, oder mp zu seinem Zehler, und x zu seinem Nenner ꝛc.

Anmerck. 229. Die meisten Autores nennen solcherley Zehler auch coëfficientes, so man unten in den Æquationen etwas

was genauer betrachten wird, und wie die Ordnung der efficientium das Factum nicht variret, also ist auch *ab* = *ba* (§. 98.) nehmlich ∴ ∴ ∴ 6 ist = 3.2 oder 2.3 (§. 68.) desgleichen ist *cab* = *cba* = *acb* &c. (§. 69.) welches unten in 273. §. auch noch anderster bewiesen wird. Jedoch ist es zuweilen deutlicher, so man *c.ab* oder *cd.ef* statt *cab*, oder *cdef* schreibet. Denn also kommen noch die rechten efficienten zum Vorschein, da sie sonsten (ohne dem Unterscheid) leichte könnten confundirt werden.

230. Wenn man die positiven und negativen Quantitäten des Multiplicatoris und Multiplicandi gehörig verwechselt, so lassen sich alle Multiplicationes auf viererley Fälle reduciren, nehmlich man führet entweder Eintheilung.

✝	in	✝
✝	in	—
—	in	✝
—	in	—

231. Da nun 1. zu Formirung des Multiplicatoris eben so muß genommen werden, wie der Multiplicandus zu Formirung des Products, (§. 97.) so kan man z. E. obige 4. Casus also exprimiren: Erläut.

	Unit.	Multiplicator	Multiplicand	Productum
I.	1 gegen	✝ 2	wie ✝ 3	gegen ✝ 6
	oder 1	✝ *a*	✝ *b*	✝ *ab*
II.	1 gegen	✝ 2	wie — 3	gegen — 6
	oder 1	✝ *a*	— *b*	— *ab*
III.	1 gegen	— 2	wie ✝ 3	gegen — 6
	oder 1	— *a*	✝ *b*	— *ab*
IV.	1 gegen	— 2	wie — 3	gegen ✝ 6
	oder 1	— *a*	— *b*	✝ *ab*

Nehmlich I. Wie 1 zweymahl addirt ist, um den Multiplicatorem †2 (oder †*a*) heraus zu bringen, so muß auch der Multiplicandus †3 (oder †*b*) zweymahl addirt werden, um das Product †6 (oder *ab*) heraus zu bringen.

II. Wie 1 zweymahl genommen ist, damit der Multiplicator †2 (†*a*) können heraus kommen, so muß auch der Multiplicandus - 3 (-*b*) zweymahl genommen werden, damit das Product - 6 (-*ab*) können heraus kommen. (§. 224.)

III. Wie 1 zweymahl hinweg genommen ist, damit der Multiplicator - 2 (-*a*) können herauskommen, so muß auch der Multiplicandus †3 (†*b*) zweymahl weggenommen werden, damit das Product - 6 (-*ab*) können heraus kommen, denn †3 zweymahl hinweg nehmen, giebt - 6 (§. 223.)

IV. Wie 1 zweymahl hinweggenommen worden, um den Multiplicatorem - 2 (-*a*) heraus zu bringen, so muß auch der Multiplicandus - 3 (-*b*) zweymahl hinweg genommen werden, um das Product †6 (†*ab*) heraus zu bringen. Denn - 3 zweymahl subtrahiren, ist eben so viel als 3 zweymahl addiren, (§. 225.)

Zusatz. 232. Hieraus siehet man, daß einerley Signa im Product † und verschiedne Signa — geben. Und da Multiplicare nichts anders, als rem ad præscriptum Multiplicantis ponere, (§. 97.) pflegen dieses etliche nicht uneben mit Abhörung eines Zeugens zu illustriren, von dem es heißt:

$$\overset{\dagger}{\text{Qui affirmat}}\begin{cases}\text{se } \overset{+}{\text{affirmasse}}\text{, ille } \overset{+}{\text{affirmat}}\\ \text{se } \overset{-}{\text{negasse}}\text{, ille } \overset{-}{\text{negat}}\text{,}\end{cases}$$

$$\overset{-}{\text{Qui negat se}}\begin{cases}\overset{+}{\text{affirmasse}}\text{, ille } \overset{-}{\text{negat}}\text{.}\\ \overset{-}{\text{negasse}}\text{, ille } \overset{+}{\text{affirmat}}\text{.}\end{cases}$$

233. Oder nach obiger Manier, (so allbereit im 215. §. vorgestellet,) und nach folgender Reihe: Anmerck.

— — — — — — — 0 + + + + + + +

6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6

Muß z. E. in der Multiplication -3 mit -2 von +1 eben also rückwärts auf den Multiplicatorem (-2 geschritten werden, als von Multiplicando -3 auf das Product +6 geschritten wird. Denn von $\overset{+}{1}$ auf den Multiplicatorem $\overline{2}$ zu kommen, schreitet man rückwärts erst einen Schritt auf 0, und eben diese Distantz, (nehmlich 1. Schritt) continuiret man von 0 zweymahl biß auf $\overline{2}$ zu kommen: Auf gleiche Weise schreitet man vorwärts von $\overline{3}$ auch auf 0, und eben diese Distantz, (nehmlich 3 Schritt) continuiret man von 0 zweymahl biß auf $\overset{+}{6}$ zu kommen. *

234. Ferner gilt bey der Multiplicatione literali eben dasjenige, was oben schon überhaupt bey der Multiplication erinnert worden, nehmlich daß man so wohl die Zehler, als auch die Nenner mit einander vermehren, und die Nenner auf einerley Sachen referiren müsse, z. E. 3 *b* mit 2 *a* multiplicirt, geben 6 *ab*. Da denn, wenn z. E. *a* nach Belieben angenommene 4 Einheiten, und *b* alsdenn 5 solche angenommene Einheiten gilt, im Producte 6 mahl 20 oder 120 dergleichen angenommene Einheiten heraus kommen. Anmerck.

235. Und muß man sich nicht irren lassen, daß z. E. in der Lehre von Bewegungen die Meilen (= *M* oder *m*) mit Tagen (= *T* oder *t*) vermehret werden, wenn sich z. E. die Geschwindigkeiten *G* und *g* gegen einander verhalten wie *Mt* gegen *mT*. Denn diesem ist (im §. 198.) Anmerck.

* Wie solches Monſ. de Crouſaz in denen Reflexions ſur l' utilité des Mathematiques, und in ſeinem Traité de l' Algebre pag. 54. f. erkläret.

schon begegnet worden, und soll unten in der Proportion bald erhellen, daß man die Meilen und Tage nicht so wohl selbsten, sondern nur ihre Rationes oder Verhältnüsse in einander führe, welches gleichergestalt Wallisius in oben angeführtem Orte * allbereit zulänglich erläutert hat.

15. Aufgabe.

15. Aufgabe.

235. Die complexen und incomplexen Quantitäten in einander zu multipliciren, und zwar α) die incomplexen, wo nehmlich kein Signum darzwischen stehet.

1.) Multiplicire man so wohl die Zehler als Nenner in einander, und wo kein Zehler voran stehet, ist es so viel, als stünde 1 vor. (§. 115. und 76.)

2.) Einerley Buchstaben, so 2, 3, und mehr mahl vorkommen, abbrevire man durch hinten angehengte kleine Ziffern, so man Exponenten heist.

3.) Bestehen beyderley efficientes aus Buchstaben mit Exponenten, so addire man nur diese, dann giebt die Summe den neuen exponenten, welche aber keinen haben, da ist es so viel, als wenn oben 1 angehenget wäre.

Exempel auf

No. 1.

3^{b}	ef	$4c$	m	$2a$		cbb			
$2a$	cd	d	n	a		ebb			
$6ab$	$cdef$	$4dc$	nm	aaa	oder a^3	$ccbbbb$	oder	c^2b^4	

No. 2

* Wallisii Op. Arithm. cap. 37.

No. 3.

No. 3

$2a^4$	$5a^3$	$2a^2b^3$
a	$3a^3$	$3a^5b^2$
$2a^5$	$15a^6$	$6a^7b^5$

Beweiß auf No. 1.

1.) Indem die unabgetheilten Zahlen ebenfalls aus ihren Zehlern und Nennern bestehen, (§. 16. 17.) so müssen sie nach der Natur der Multiplication auch in einander geführet werden, (§. 109. und 110.)

2.) Damit man nicht lange schreiben und zehlen, oder in geschwinde Zehlen sich nicht so leicht versehen möge, nimmt man lieber anstatt *aaaaaaa* die kürtzere Expression a^7, welche 7 anzeiget, daß *a* siebenmahl genommen und in sich und seine producte multiplicirt sey.

3.) Weil die Multiplication durchs Nebenansetzen geschiehet, (§. 76.) ist es nach vorhergehenden einerley, ob man *bbb* mit *bb* oder b^3 mit b^2 multipliciret, und im ersten Fall *bbbbb*, oder im andern Fall b^5 setzet. Jedoch muß man wohl Acht haben, daß man nicht etwa z. E. b^5 und $5b$ vor einerley nimmt. Denn jenes ist fünffmahl in einander multiplicirt, und dieses nur fünffmahl schlechthin addirt.

β.) Die complexen mit einerley oder verschiedenen Zeichen in einander zu vermehren.

1.) Multiplicire man mit iedem Theil des Multiplicatoris in ieden Theil des Multiplicandi nach der Reihe hindurch, nehmlich die Buchstaben in die Buchstaben, die Ziffern in die Ziffern, [wie in der Multiplication der blossen, und der incomplexen unabgetheilten Zahlen allbereit angewiesen worden,] so kommen die producta partialia, die man gewöhnlicher massen neben- und unter einander schreibet.

2.) Haben nun die zwey besonders multiplicirten Theile einerley Signa, so setze man ihren Producten † vor, haben sie aber verschiedene Signa, so setze man ihnen — vor, und addire die Facta partialia nach der 13. Aufgabe.

Exempel, worinnen nach Belieben

$a = 6 \quad b = 5 \quad c = 4 \quad d = 2$

I.	$b + c$	$5 + 4$	$= 9$	$b - d$	$= 3$
	a	6	$= 6$	$a - c$	$= 2$
	$ab + ac$	$30 + 24$	$= 54$	$- cb + cd$	
				$ab - ad$	
				$ab - ad - cb + cd$	$= 6$

Allwo $ab + cd = 38 \quad ad + cb = 32$ und

$ab + cd - ad - cb = 38 - 32 = 6.$

Erläut. mit blossen Zahlen:

$a + c - d$	$= 8$	$aa + 2cd$	$= 52$ posit.
$a - c + d$	$= 4$	$cc + dd$	$= 20$ negat.
$ad + cd - dd$		$a^2 + 2cd - c^2 - d^2$	$= 32$
$- ac - cc + cd$			
$aa + ac - ad$			
$aa - cc + 2cd - dd$	$= 32$		

Positi-

II.			Positivæ.	Negativæ.
$2a-2d-c$	$=$	4	$2a^2=72$	$6d^2=24$
$a+3d-c$	$=$	8	$4ad=48$	$3ac=72$
$-2ac+2cd+cc$			$c^2=16$	$cd=8$
$6ad-6dd-3cd$			136	104
$2aa-2ad-ac$			104	Subtr.
$2a^2+4ad-6d^2-3ac-cd+c^2$	$=$	32	—	32

Beweiß auf No.

1.) Dieser gründet sich auf die Multiplication der incomplexen Quantitäten, und daß man auf einmahl einen Theil des Multiplicatoris in alle Theile des Multiplicandi führen müsse, und so ferner, ist oben in der gemeinen Vermehrung §. 115. schon angezeiget worden.

2.) Welcher gestalt ferner zwey positive und zwey negative Quantitäten im producte +, und eine positiva und negativa zusammen multiplicirt im Producte — geben, erhellet aus dem 231. u. 232 §. Daß man aber die Grössen, so einander aufheben, gar nicht, und die einerley sind, so gleich mit ihrer Summe im Haupt-Facto darunter schreibet, ist aus der Addition bekannt (§. 224.)

236. Indem in ieder Division der Dividendus das Mensuratum, der Divisor die Mensur, und der Quotus die Anzahl der so vielmahl wiederholten Mensur ist, so kan man ieden Divisorem und Quotum als Efficientes, und Anmerk.

ieden Dividendum als ihr Factum ansehen. (§. 129.)

Wie nun ein Factum affirmativum, das einē { positivum / negativum } efficientem gehabt, auch den andern efficientem { positivum / negativum } haben muß, und wie ein Factum negativum, das einen { negativum / positivum } efficientem gehabt, im Gegentheil den andern efficientem { positivum / negativum } haben muß: (§. 231. und 232.)

Lehrsatz. Also muß auch, wenn man eins vors andere setzet, ein Dividendus affirmativus, der einen { positivum / negativum } Divisorem hat, wiederum einen { positiven / negativen } Quotum heraus bringen, desgleichen muß ein Dividendus negativus, der einen { negativum / positivum } Divisorem hat, im Gegentheil einen { positiven / negativen } Quotum haben. Das ist, wenn mans durch Signa aussprechen will:

Ein Dividendus mit
- † durch den Divisor mit † giebt im Quoto †
- † durch den Divisor mit — giebt im Quoto —
- — durch den Divisor mit † giebt im Quoto —
- — durch den Divisor mit — giebt im Quoto †

Zusatz. 237. Demnach gilt wegen der Verwechselung der Zeichen in der Division eben die Regul, die in der Multiplication gegeben worden, nehmlich:

Einerley verschiedene Zeichen im Dividendo und Divisore geben im Quoto { † / — }

238. Weil die Gültigkeit der Buchstäblichen Quanti- Anmerck.
täten nicht wie in den gemeinen Zahlen auf den Rang, sondern auf die ihnen insonderheit willkührlich zugeeignete Unitäten ankömmt, so hat man sich an die Ordnung derer Grössen in der Division so genau nicht zu binden, sondern man nimmt das Factum Divisoris und Quoti aus dem Dividendo hinweg, wo man es findet, allermassen die andersstehenden efficienten das Factum nicht verändern, (§. 229.)

239. Und wie man in der Multiplication so wohl den Anmerck.
Zehler als den Nenner von ieder Grösse in einander hat multipliciret, (§. 235.) also nimmt man sie auf eben diese Art auch wieder aus einander, indem man so wohl die Zehler als Nenner in einander dividirt, z. E. wie $2b$ mit $3a$ vermehrt, $6ab$ thut, also bringen auch $6ab$ mit $2b$ dividirt, wiederum $3a$. (§. 124.)

16. Aufgabe.

240. **Die einfachen und zusammen gesetzten Grössen mit einander zu dividiren.** 16. Aufgabe.

α.) Die einfachen:

1.) Dividire man mit beyden Zehlern und Nennern in einander, (wie gewöhnlich,) und nehme den Quotum nicht grösser, als daß sein Factum mit dem Divisore, den Dividendum wieder herstellet, welches geschiehet, wenn man im Dividendo eben diejenige Buchstaben weglässet, die im Divisore stehen, und die übrigen als Quotum setzet, welche Grössen aber keinen Zehler vor sich haben, da ist es so viel, als stünde 1 vor.

2.) Wo

2.) Wo bey gleichen Buchstaben Exponenten stehen, da setze man einen dergleichen Buchstaben als Quotum, und hänge ihm oben die Differentz beyder Exponentium hinten an, so giebt sich der Exponens Quoti.

3.) Wo kein Exponente vorhanden, da kan man sich oben statt dessen allemahl die Unität einbilden.

4.) Sind aber der Dividendus und Divisor mit ihren Nennern gantz divers, so kan die Division in der That nicht geschehen, und wird nur durch die dazwischen gezogene Linie, oder zwey puncte (:) angedeutet, biß sie erst nach Gelegenheit reduciret, iedoch kan man noch zuweilen die Zehler in einander dividiren.

5.) Haben der Dividendus und Divisor zwar einige gleiche, hingegen aber auch einen oder etliche diverse Buchstaben, so lasse man die gleichen weg, und setze die diversen als einen Bruch statt des Quoti, und wo oben kein diverser stehet, da setze man nur in Gedancken die Unität hin.

Exempel auf No. 1.

$ab(b \quad cdef(df \quad 6mn(3m \quad 8ax(4x \quad 5ry(5y$
$a \quad ce \quad 2n \quad 2a \quad r$

auf No. 2. und 3.

$a^5(a^3 \quad 15a^7(5a^4 \quad 6a^5(6a^1$ oder $6a$
$a^2 \quad 3a^3 \quad a^4$

$d^m(d^{m-1} \quad a^3(a^2 \quad a^1(a^0$ oder $a(1 \quad 18abcx^2(2bx.$
$d \quad a \quad a^1 \quad a \quad 9acx$

Auf

Auf No. 4.

$a(a$ oder $a:b$ $\quad cy(cy:mx$ $\quad a^4(a^4$
$b\ \frac{}{b}$ $\quad\quad mx$ $\quad\quad b^3\ \frac{}{b^3}$

$10z(2z$ $\quad\quad 12dmx(3dmx$
$5y\ \frac{}{1y}$ $\quad\quad 4ay\ \frac{}{ay}$

Auf No. 5.

$bc(c\ ||\ abc(1c=c\ ||\ 9mpy(3my\ |\ mn\ 1(1\ ||\ a(1$
$db\ \frac{}{d}\ ||\ abd\ \frac{}{d}\ \frac{}{d}\ ||\ 3\ px\ \frac{}{x}\ |\ mnyz\ \frac{}{yz}\ ||\ ab\ \frac{}{b}$

Beweiß auf No.

1.) Dieses ist aus der Natur der Division überhaupt klar, als worinnen so wohl die Zehler als Nenner in einander getheilet (§. 139.) und die Quoti nicht dürffen grösser gesetzet werden, als das ihr und des Divisoris Factum den Dividendum wieder herstellet. (§. 130.)

2. und 3.) Was die Multiplication zusammen verbunden, das löset die Division wieder auf, und da *aaa* (oder a^3) mit *aa* (oder a^2) *aaaaa* (oder a^5) macht, so ist auch $a^5 : a^2 = a^3$. Oder da a^4 mit *a* (oder a^1) a^5 giebt, so bringet auch a^5 durch *a* dividirt, wiederum a^4. (§. 124.)

4.) Folget aus dem 140. §. Daß man aber dennoch bey diversen Buchstaben die Zehler in einander dividiren könne, ist leicht zu begreiffen. Denn der Quotus soll andeuten, wie offt der Divisor im Dividendo enthalten sey, (§. 123.) Nun aber ist z. E. 5. in 10 eben so offt begriffen als 1 in 2. (§. 125.) Die Nenner aber sind nur die Nahmen des

Ge-

Gehalts, folglich stecken 5y in 10z eben so offt, als 1y in 2z.

5.) Man kan gleiche oben und unten vorhandene Buchstaben als gleiche Zehler ansehen, (§. 228.) die in einander dividirt, allezeit 1 bringen. (§. 125.) Eins aber ist nicht nöthig zum Zehler des Quoti zu setzen, weil es weder multipl. noch dividiret, (§. 119. 126.) Derowegen braucht man nur die diversen Nenner untereinander zu schreiben, (nach vorhergehenden.) So aber nur im Divisore ein oder etliche diverse Buchstaben, so muß man, um einen Nenner im Dividendo zu bekommen, nach dem gemeinschafftlichen Zehler allerdings eine Unität concipiren, und alsdenn, wie gleich vorher gemeldet, verfahren, welches alles unten in der Doctrina Rationum noch wird deutlicher kommen, inzwischen kan auch dieses aus folgendem 265. §. geschlossen werden.

β.) Die zusammen gesetzten Grössen in einander zu dividiren.

1.) Setze man den Divisorem zur Lincken an die Seite, schliesse ihn mit einem kleinen Bogen ein, und den Dividendum distinguire man vom Quoto wie in der gemeinen Division.

2.) Eigne man dem Divisori einen schicklichen Dividuum zu, er stehe nun wo er wolle, iedoch nimmt man insgemein die meist-componirte und positive Grösse zuerst dazu.

3.)

3.) Dividire man (nach vorhergehenden) mit einem Theil des Divisoris in den einen Theil des Dividui, und zwar setze man den Quotum so, daß er in alle Theile des Divisoris multipliciret, wo möglich aus allen Theilen des Dividui, oder zum wenigsten aus einem desselben Theil genau kan weg genommen werden, und was bleibet, setze man unten drunter.

4.) Ist der Quotus aus einerley Signis, so setze man ihm +, ist er aus unterschiedenen Signis entsprungen, so setze man ihm — vor.

5.) Also continuire man weiter, und das Residuum, wo eins kömmt, nehme man zum Zehler, den Divisorem aber zum Nenner des an Quotum anzuhengenden Bruchs.

Exempel:

$$\begin{array}{l} px+py\,(x+y \\ p) \end{array} \qquad \begin{array}{l} ab+ac\,(a \\ b+c) \end{array}$$

Man setze nach Belieben $a=8$ $b=5$ $c=4$ $d=2$.
so ist im folgenden Exempel der Dividend. $=12$
der Divisor $=3$
und der Quotus $=4$ als

$$\begin{array}{l} ab-ad-cb+cd\,(a-c \\ \;\;''\;\;''\;\;''\;\;'' \\ b\;\;d) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 40-16-24+8\,(8-4 \\ \\ 5-2) \end{array}$$

$aa-cc+2cd-dd$ ($a+c-d$

$a-c+d$) $+ac-ad$

$+cd$

Dividendus = 60

Divisor = 6

Quotus = 10

$2a^2+4ad-6d^2-3ac-cd+c^2$

$2a-2d-c$) ($a+3d-c$

$+6ad \quad -2ac+2cd$

x^3-c^3 (x^2+cx+c^2

$x-c$) $+cx^2+c^2x$

y^2-z^2 ($+r$

$y-z$) $+yz$ ($y+z \frac{r}{y-z}$

Beweiß auf No.

1. 2. 3.) Dieses Verfahren gründet sich so wohl auf die allgemeinen Reguln der Division überhaupt, (§. 144.) als auch auf vorige Reguln der Division mit den einfachen Grössen. Daß man aber von der meist-componirten positiven Grösse gerne anfänget, geschiehet deswegen, damit die gröste positiva wieder zuerst in Quotum komme, und sich in weitern Operationen desto bequehmer fortführen lasse.

4.) Die Ansetzung und Verwechselung der Signorum erhellet aus dem 236. §. und daß man

5.) Den Rest als einen Bruch noch dem Quoto anhengen müsse, folgt aus dem 143. §.

Wolte

Wolte man der Gewißheit wegen in etwas weitläufftigen Exempeln sich der oben im 146. §. angewiesenen Portugiesischen Division bedienen, in welcher die Summe der Factorum Quoti und Divisoris zuletzt den Dividendum muß restituiren, so kan es auch nicht schaden, zum wenigsten können die Anfänger solche so lange brauchen, biß sie sich im Zeichen-Wechsel und Abzug ein wenig feste gesetzet.

Hierzu sey eines von vorigen:

Dividendus Quotus

Divisor. $2a^2+4ad-6d^2-3ac-cd+c^2$ $(a+3d-c$

$2a-2d-c)$ $+6ad \quad -2ac+2cd$

Facta partialia.
$2a^2-2ad-ac$
$+6ad-6d^2-3cd$
$-2ac+2cd+c^2$

Summa $= 2a^2+4ad-6d^2-3ac-cd+c^2 =$ Dividendo.

241. Nachdem nun die so genannten Species Calculi literalis abgehandelt, so wird es nicht undienlich seyn, sie auf ein und andere Arithmetische Grund-Wahrheiten zu appliciren. Denn dadurch wird man nicht allein die vorigen Reguln nach und nach lernen anbringen, sondern es werden sich auch die Ausdrückungen derer Grössen überhaupt zugleich gar leichte insinuiren. Anmerck.

4. Allgemeine Ausspruche und Haupt-Wahrheiten aus den vier Rechnungs-Operationen, welche theils vor sich klahr, und nur mit Buchstaben erläutert, theils auch auseinander deducirt werden.

a) Aus der Addition.

Grundsatz. **242.** Gleiche Zahlen kan man vor einander substituiren. §. 69.

Also wenn $a = x$, so kan man überall, (wo in eben der proposition das x stehet,) die ihm gleiche Quantität a davor hinsetzen.

Grundsatz. **243.** Indem die Grösse der Gantzen von der Grösse ihrer gesammten Theile dependiret, (§. 67.) so geben auch gleiche gesammte Theile, gleich-grosse Gantze.

Nehmlich wenn $p + P = T$ und $p + \pi = p + P$, so sind auch $p + \pi = T$. (§. 242.)

Zusatz. **244.** Folglich, wenn man gleiches zu gleichen addirt, müssen gleiche Summen oder Gantze heraus kommen.

Wenn $a + b = y$, so ist $a + b + c = y + c$.

Grundsatz. **245.** Wenn man zu einer kleinern und grössern Quantität beyderseits gleiches addirt, wird die erste Summe kleiner, und die andere grösser.

Es sey $a < b$ und $b - a = d$, so ist $b = a + d$ (§. 244.) und dahero $a + c < a + d + c$. Demnach wird die andere Summe allezeit um die Differentz grösser.

Grundsatz. **246.** Wenn 2 Grössen einer Dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander selbst gleich.

Wenn $a + b = y$ und $d + c = y$ so ist $a + b = d + c$. (§. 242.).

Lehrsatz. **247.** Wenn 2 Grössen mit einer dritten einerley Summe machen, so sind sie einander gleich.

Z. E. Wenn $a + b = n$ und $c + b = n$
so ist $a = c$. Denn $a + b = c + b$. (§. 246.) Hierzu
addire man beyderseits $- b \quad - b$
so ist $a = c$. (§. 220. und 244.)

248. Wenn man eine gantze Zahl oder überhaupt ein Gantzes 2 mahl nimmt, so entstehet eine grade (gantze) Zahl, (Numerus par) Z. E. so man vor eine gantze Zahl, n setzet, so ist ein numerus par $= 2n$. (§. 10 und 11.) Und dahero kan man eine iede grade Zahl wieder in 2 = Theile theilen. Erklär.

249. Hingegen so man einer graden Zahl 1 addiret, so entstehet eine **ungrade** (gantze) Zahl, oder ein numerus impar. Erklär.

α.) Nehmlich wenn die grade $= 2n$, so ist die ungrade $= 2n + 1$. Und deswegen kan sie nicht in zwey gleiche gantze Zahlen abgetheilet werden. Wenn $n = o$, so ist $2n + 1 = 1$, und kan man dahero die Unität auch mit zu den ungraden Zahlen rechnen. β.) Desgleichen ist iede Zahl ungrad, so mit 1 addirt, eine grade Summe macht. Denn zu 1 muß man entweder 1, oder $2n + 1$ addiren, wenn die Summe soll grad werden. Erläut.

250. Grade Zahlen so wohl in grader als ungrader Anzahl addirt, machen iederzeit eine grade Summe. Lehrsatz.

Denn $2m + 2n$ oder $2r + 2p + 2q$ lassen sich beyderseits wiederum in 2 gleiche Theile theilen, und sind dahero grad. (§. 248.)

251. Ungrade Zahlen in grader Anzahl addirt, machen eine grade Summe. Lehrsatz.

Weil alle ungrade Zahlen eine Unität mehr haben als die graden, so sind z. E. von $2m + 1$, $2n + 1$. $2r + 1$, $2s + 1$ die angehengten Unitäten wiederum einer graden Zahl gleich, als hier $= 2t$, und dahero machen $2m + 2n + 2r + 2s + 2t$ wiederum eine grade Zahl, (§. 248. und 250.)

252. Ungrade Zahlen in ungrader Anzahl addirt, machen eine ungrade Summe. Lehrsatz.

Wenn man die ungrade Anzahl, nach welcher man sie so viel mahl nehmen will, $2p+1$ nennet, so machen die hinzugefügten Unitäten zusammen auch $2p+1$, und kömmt daher die ungrade Summe $\equiv 2m+2n+2r$ &c. $+2p+1$. (S. 249.)

Lehrsatz. 253. Die Veränderung der Ordnung, oder die Versetzung der partium, macht der Grösse nach kein ander Totum.

Denn wenn $a+b+c \equiv T$, so ist $c+a+b$ auch $\equiv T$. (S. 243.)

B.) Aus der Subtraction.

Lehrsatz. 254. Gleiches von gleichen subtrahirt, giebt gleiche Reste.

Es sey $a \equiv b$ und $c \equiv d$, so ist zu beweisen, daß $a-c \equiv b-d$. Da $a-c \equiv a-d$
Und $b-d \equiv a-d$ (S. 242.)

So ist auch $a-c \equiv b-d$ (S. 246.)

Lehrsatz. 255. Die Differentz zweyer Grössen zur kleinern addirt, restituiret die grössere.

Es sey $a > b$, und $a-b$ sey $\equiv d \equiv$ differ.
so addire man beyderseits: $b \quad b$

kömmt $a \equiv d+b$. (S. 244.)

Lehrsatz. 256. So man die Differentz von der grössern Quantität subtrahirt, bleibet die kleinere.

Nach vorigen ist $a \equiv d+b$ Nun subtrahire man davon
beyderseits $d \quad d$

kömmt $a-d \equiv b$. (S. 254.)

Lehrsatz. 257. Wenn man von einer grössern und kleinern Grösse beyderseits einerley subtrahirt, so wird die erste Differentz grösser, als die andere.

Es sey $a > b$, und die Diff. $= d$, so ist
$b + d = a$. (§. 255.) Nun subtrahire man beyderseits c

$$\begin{array}{rr} c & c \\ \hline b + d - c = a - c \end{array}$$

kömmt $b + d - c = a - c$ (§. 254.)
dahero $b + d - c > b - c$. Nehmlich um die Differentz beyder Zahlen ist die erste Differentz grösser als die andere.

258. Wenn man von einer graden Zahl 1 subtrahirt, Lehrsatz.
wird sie ungrade.

Es sey $2n - 1 = d$ hierzu addire man beyderseits:
$+1 \qquad +1$

kommt $2n = d + 1$ (§. 244.)
folglich ist d eine ungrade. (§. 249.) β.)

259. Die Differentz so wohl zweyer graden, als un- Lehrsatz.
graden Zahlen, ist allezeit grade, und die Differentz einer graden und ungraden ist allemahl ungrade.

Es seyn 2 grade $2m$ und $2n$, so sind 2 ungrade $2m + 1$ und $2n + 1$. (§. 248. 249.) Im ersten Fall ist die Differentz $2m - 2n$, welche grade, (§. 248.) Im andern Fall ist $2m + 1 - 2n - 1$ auch grade, denn $+1$ und -1 ist $= 0$. (§. 220.) Dahero bleibt $2m - 2n$ noch übrig, welche nach vorigen auch grad. Endlich ist $2m + 1 - 2n$, desgleichen $2m - 2n - 1$ beyderseits ungrad. (§. 249. und 258.)

Lehrsatz.

260. So man zweyer ungleichen Grössen ihre Summe und Differentz addirt, so kömmt die grössere doppelt.

Es sey $a > b$, so ist die Summe $a + b$
und die Difference $a - b$

Deren aggregat $= 2a$.

Lehrsatz.

261. Hingegen so man ihre Differentz von ihrer Summe subtrahirt, so bleibet das Duplum der kleinern übrig.

Als:	$a + b$	davon
Subtr.	$a - b$	
Restirt.	$2b$.	

Lehrsatz. **262. Wenn man zur halben Summe zweyer Grössen die halbe Differentz addirt, so kömmt die grössere, subtrahiret man aber die halbe Differentz von der halben Summe, so kömmt die kleinere Quantität heraus.**

Es sey die grössere $=$ $2g$ die kleinere $=$ $2k$, die Differentz $=$ $2g - 2k = 2d$, so ist die halbe Diff. $= g - k = d$, und die halbe Summe $= g + k$.

Demnach muß bewiesen werden, daß $g + k + d = 2g$ und $g + k - d = 2k$.

Man substituire vor d das ihm gleiche $g - k$

so ist $g + k + g - k = 2g$
und $g + k - g + k = 2k$ (§. 220. 260. 261.)

Oder so $2a + 2b$ als Summe mit ihrer Difference
$2a - 2b$ addirt

giebt: $4a$ und subtrahirt

giebt: $4b$ so giebt die halbe Summe $a + b$ mit der halben Differentz $a - b$ addirt, die grössere $2a$, und die halbe Differentz davon subtrahirt, bringt die kleinere $2b$. (§. 260. 261.)

3.) Aus der Multiplication und Division.

Lehrsatz. **263. Gleiches mit gleichen multiplicirt, giebt gleiche Facta.**

Es sey $a = b$ und $c = d$. so ist $ca = db$. Denn
$ca = cb$ und
$db = cb$. (§. 242.)

Ergo $ca = db$. (§. 246.

Lehrsatz. **264. Wenn 2 Grössen einerley Multipla, oder gleiche vielfache von einer dritten sind, so sind sie einander selber gleich.**

Wenn a z. E. 4 mahl so groß als p, und c ist 4 mahl so groß, als p, so ist $a = 4p$ und $c = 4p$, folglich $a = c$. Uberhaupt so $e > 1$. und $a = ep$. und $c = ep$

so ist $a = c$. (§. 246.)

Lehrsatz.

265. Wenn 2 gleiche Grössen beyderseits mit 2 andern Grössen und vice versa, multiplicirt, einerley Facta heraus bringen, so sind die 2 andern Grössen einander auch gleich.

Z. E. Wenn $a = b$ und $ma = nb$. so ist auch $m = n$. Denn so man vor b, a substituirt, so ist

$$ma = na$$

Das ist nach der Natur der Multiplication;

Der multiplicans m nimmt a so vielmahl, als er Unitäten hat, und der multiplicans n nimmt a auch so vielmahl, als er Unitäten hat, (§. 96.) a aber ist beyderseits gleich vielmahl genommen, daher hat m so viel Unitäten, als n, und folglich ist $m = n$, (§. 67.)

Zusatz.

Also siehet man auch hieraus, daß in obiger Division (§. 240. No. 5.) $bc : db$ oder $\frac{bc}{db} . = \frac{c}{d}$.

Denn man multiplicire sie beyderseits mit db, kömmt $\frac{dbbc}{db}$ und $\frac{dbc}{d} = bc$ und bc. (§. 130.) Dahero ist $\frac{bc}{db} = \frac{c}{d}$.

Lehrsatz.

266. Wenn man 2 gleiche Grössen mit einer grössern und kleinern multiplicirt, so wird das erste Factum grösser, als das andere.

Es seyn die gleichen Grössen a und a, und $b > c$, so ist $ab > ac$. Denn im ersten Facto ist a so vielmahl genommen, als b Unitäten hat, und im andern Facto ist a so vielmahl genommen als c dergleichen Unitäten hat, (§. 96.) Nun aber hat b eben diejenigen, aber mehr Unitäten als c, folglich ist $ab > ac$. (§. 71 72.)

Lehrsatz.

267. Wenn eine Zahl gegen die andere eben den Gehalt hat, den eine dritte gegen die vierdte hat, so wird die andere von der ersten entweder genau und eben so vielmahl ausgemessen, als die vierdte von der dritten, oder wenigstens messen doch eben diejenigen Theile von der ersten

sten die andere aus, dergleichen (Theile) von der dritten die vierdte ausmessen, und vice versa.

Wie offt ie und ie 2 Grössen in einander enthalten, zeigt die Division vermittelst des quotienten an, (§. 122. 123.) als welcher eben zehlet, wie offt das gantze Maaß, oder gewisse Theile desselben in dem gemessenen zugelanget, (§. 127. 128.) Nun ist das Maaß der andern die erste, und der vierdten die dritte. Daher muß die gantze erste, oder eben diejenigen Theile der ersten, in der andern so vielmahl zureichen, als die gantze dritte, oder eben dergleichen ihre Theile in der vierdten zureichen.

Lehrsatz. 268. Wenn 2 Grössen *a* und *b* einander gleich, beyde aber mit zwey andern *c* und *d* dividirt werden, und gleiche Quotos bringen, so sind auch die zwey andern Grössen, *c* und *d* einander gleich.

Denn wenn man die gleichen Quotos *q* und *q* mit denen Divisoribus multiplicirt, so ist $c\,q = a$ und $d\,q = b = a$ (§. 129.) Folglich ist $c = d$. (§. 265.)

Lehrsatz. 269. Wenn man eine drtte Zahl mit zwey unterschiedenen Zahlen multiplicirt, so sind die Facta eben so vielmahl, als die differenten Factores in einander enthalten.

Z. E. Wenn der erste Factor 3 mahl so groß als der andere, so ist auch das erste Product 3 mahl so groß, als das andere.

Denn es sey die dritte $= d$, die erste $= e$, und die andere a, e aber sey c mahl so groß, als a, so ist zu beweisen, daß $e\,d$ gegen $a\,d$ wie e gegen a.

Jeder Multiplicator nimmt seinen Multiplicandum (d) so vielmahl als er Unitäten hat. Hat nun e, c mahl so viel Unitäten als a, so nimmt er auch d, c mahl so offt, als ihn a nimmt, (§. 96.) folglich ist $a\,d$, in $e\,d$ eben so viel, nehmlich c mahl enthalten, als a in e. (§. 124.)

Lehrsatz. 270. Wenn 2 unterschiedliche Zahlen mit einer dritten beyderseits dividirt werden, so sind die Quoti eben so vielmahl in einander enthalten, als die dividirten Zahlen.

Wenn

Wenn $a : e = b$ und $c : e = d$, so ist b gegen d wie a gegen c.

Denn $e\,b = a$ und $e\,d = c$. (§. 129.)

Nun ist b gegen d wie $e\,b$ gegen $e\,d$ (§. 269.)

Folglich ist b gegen d wie a gegen c. (§. 242.)

271. Wenn von 4 Zahlen das Factum der beyden mittelsten gleich ist dem Facto der beyden äussersten, so ist der Quot aus der ersten und andern gleich dem Quot aus der dritten und vierdten, oder die erste ist in der andern eben so vielmahl enthalten, als die dritte in der vierdten. Lehrsatz.

Es seyn die 4 Zahlen a, b, c, d, Wenn nun $bc = ad$, so ist a gegen b wie c gegen d. Man multiplicire

c und d beyderseits mit a) so ist ac gegen ad wie c gegen d. §. 269.

vor ad substituize man bc, so ist ac gegen bc wie c gegen d. §. 242.

Nun dividire man mit c) so ist a gegen b wie c gegen d. §. 270.

272. Wenn von 2 Zahlen, a und b eben den quotienten haben, oder so vielmahl in einander stecken als c und d, so stecket auch a in c so vielmahl, als b in d, oder es haben auch a und c eben den quotienten, den b und d haben. Lehrsatz.

Es sey a gegen b wie c gegen d, $\frac{a}{b} = e$ $\frac{c}{d} = e$

so ist $e\,b = a$, und $e\,d = c$ (§. 129.) folgl. wenn man gleiches substit. $e\,b$ gegen b wie $e\,d$ gegen d. Und da $e\,b$ gegen $e\,d$ wie b gegen d, §. 269.

so ist auch a gegen c wie b gegen d.

173. Einerley Factores in einander multiplicirt, sie mögen versetzt seyn, wie sie wollen, geben einerley Facta. Lehrsatz.

Wenn $a \,.\, b$ bringt $a\,b$, und $b \,.\, a$ bringt $b\,a$, so ist $a\,b = b\,a$.

Aus der Natur der Multiplication ist

1 gegen a wie b gegen ab, und
1 gegen b wie a gegen ba (§. 97.)

Nun ist auch 1 gegen a wie b gegen ba. (§. 272.)

Da nun b in ba eben so vielmahl enthälten, als b in ab
so ist b gegen b wie ba gegen ab. (§. 272.)
b aber ist $=$ b, folglich ist $ba = ab$.

Und eben auf diese Art ist $abc = bac$, denn man substituire vor ab und ba die Quantität d, so ist so wohl abc als $bac = dc$, und dahero $bac = abc$ (§. 246.) Auf gleiche Weise lässet sichs von mehrern Factoribus demonstriren.

Lehrsatz. 274. Wenn von 4 Grössen die erste in der andern eben so vielmahl enthalten, als die dritte in der vierdten, so ist das Factum der mittelsten gleich dem Facto der äussersten.

Es sey a gegen b wie c gegen d, so ist zu beweisen,

daß $bc = ad$

Denn so $a : b = c$ so ist $c : d$ auch $= e$. (§. 123.)
Dahero $eb = a$ und $ed = c$. (§. 129.)

Nun ist eb gegen b wie ed gegen d. (§. 269.) das Factum der mittelsten bed ist gleich dem
Facto der äussersten ebd. (§. 273.)

Folglich, wenn man vor ed die ihm gleiche Quantität c und vor eb die ihm gleiche Quantität a substituiret,
ist $bc = ad$. (§. 242.)

Lehrsatz. 275. Wenn man eine Zahl mit einer andern ganzen Zahl, oder mit solcher anderen ihren Factoribus nach und nach multipliciret, so kommen einerley Haupt-Facta heraus.

Es seyn f und F die Factores von n, so ist $fF = n$. (§. 97. 274.) Nun multiplicire man a mit n kommt na,

Desgleichen a mit f

kömmt fa und dieses mit F

kömmt fFa.

Ist daher zu beweisen, daß $na = fFa$.

Man multiplicire die gleichen Grössen n und fF

mit na und fFa) fFa na

kömmt: $fFan$ und $fFna$

Diese letzten Facta aber sind einander gleich, (§. 273.) Ergo sind die andern Grössen fFa und na einander auch gleich. (§. 265.)

276. **Wenn man eine gantze Zahl mit einer andern gantzen Zahl, oder mit ihren Theilen nach und nach multiplicirt, und die Producta addirt, so ist die Summe derer Producte dem Product der zwey gantzen Zahlen in einander gleich.** Lehrsatz.

Es sey $n = t + T$, und damit werde multiplicirt a, so muß $na = ta + Ta$ seyn.

Weil $n = t + T$, so ist

$n - t = T$, (§. 254.) dieses multiplicire man beyderseits mit a.

kömt $na - ta = Ta$ (§. 263.) Hierzu addire man ta

$+ta$ $+ta$

kömmt $na = Ta + ta$. (§. 244.)

277. **Eine grade Zahl mit einer graden oder ungraden multiplicirt, giebt wieder eine grade.** Lehrsatz.

Es sey eine grade $= 2m$
und die andere grade $2n$

so ist das Factum $= 4mn = 2mn + 2mn$
und dahero grad. (§. 248.)

Oder es sey eine grade $2m$
und eine ungrade $2n + 1$

so ist das Factum $= 4nm + 2m$, $= 2nm + m + 2nm + m$
und dahero auch grad. (§. 248.)

Da-

Dahero müssen alle Multipla von 8, 6, 4, und 2, desgleichen auch von 10 grad seyn.

Lehrsatz. 278. Wenn man eine ungrade Zahl mit einer ungraden multiplicirt, so muß das Factum allwege ungrad kommen.

Es sey eine ungrade $2m + 1$
und eine andere $2n + 1$

$2m + 1$

$4mn + 2n$

so ist das Factum $= 4mn + 2n + 2m + 1$, welches ungrad. (§. 249.)

Zusatz. 279. Dahero wenn a eine grade Zahl, so ist $aaaaa$ &c. oder überhaupt a^n allezeit wieder grade, und so a eine ungrade, so ist $aaaaa$ &c. oder überhaupt a^n allemahl wieder ungrade.

Anmerckung und Lehrsatz. 280. Wenn $a - b$ mit sich selbst multiplicirt wird, kömmt zu Ende des Facti $+ bb$, so man das gantze Factum noch einmahl mit $a - b$ vermehrt, kömmt zuletzt $- bbb$, und so man solch Factum wieder mit $a - b$ multipliciret, kommt zu Ende $+ b^4$ &c. Denn einerley Signa geben das erstemahl $+$, unterschiedene das andere mahl $-$, einerley das dritte mahl wieder $+$ &c. folglich alterniren die Signa in b^2, b^3, b^4, &c. nehmlich grade Exponenten haben $+$, ungrade haben — (§. 235.)

Erklär. u. Lehrsatz. 281. Alle Zahlen, die durch die Multiplication zweyer gantzen Zahlen herauskommen, sind Numeri compositi, müssen 2 Factores haben, deren ieder grösser als 1 ist, (denn die Unität multipliciret nicht, (§. 119.) und macht ihr Product iederzeit eine Flächen-Zahl. Denn eben den einen Factorem kan man so vielmahl in einer Reihe setzen,

LBC

setzen, als der andere Factor Unitäten hat. (§. 98.) Also wenn so wohl *a* als *b* eine gantze Zahl und > 1, so ist *ab* eine Flächen-Zahl, deren latera oder Reihen *a* und *b* sind.

282. Hingegen sind diejenigen Zahlen, deren Unitäten in keiner dergleichen Flächen-Zahl können völlig disponirt werden, auch keine componirten, sondern ursprüngliche oder prim-Zahlen, z. E. aus 7. 11. oder 13. ꝛc. kan man keine (rechtwincklichte) Flächen-Zahl formiren, folglich haben sie auch keine Factores. (Denn weil 1 nicht multipliciret, pflegt man es auch nicht unter die multiplicatores zu rechnen,) und heissen deswegen nur Numeri Lineares, weil sie nicht die Fläche, sondern nur eine Linie oder ein Latus derselben abgeben können. Erklär.

283. Wenn ein Numerus compositus mehr als zwey Factores hat, als *abc*, so kan man 2 oder mehr vor einen nehmen, $ab = n$ und $abc = nc$ setzen. (§. 228.) und dahero wenn von zweyen Factoribus ieder eine gantze Zahl, so > 1, z. E. *m* und *n*, so exprimiret überhaupt *mn* eine componirte Zahl, sie mag aus so vielen Factoribus bestehen, als sie will. Dahingegen eine prim-Zahl nur mit *p* oder 1 *p* kan ausgedrucket werden. Anmerck.

Und wäre zu wünschen, daß man ein besser Symbolum primi generici hätte, es ist aber seithero, so viel ich weiß, noch keines zum Vorschein kommen. Jedoch wird man die vornehmsten Kennzeichen der componirten und prim-Zahlen unten nach den Brüchen und den Potentzen finden.

7.) Aus der Division alleine.

284. Wenn 2 gleiche Grössen mit einerley dritten beyderseits dividirt werden, so kommen einerley Quoti heraus, oder wie man sonst spricht: Gleiches mit gleichen dividirt, giebt gleiches. Lehrsatz.

Es sey $a = b$, und $a : c = d$ desgleichen $b : c = e$, so muß auch $d = e$ seyn.

Denn so offt c in a, so offt auch 1 in d, und
so offt c in b, oder wenn man vor b das ihm gleiche a setzet, so offt c in a, eben so offt auch 1 in e. (§. 125.)

Folglich haben d und e einerley Unitäts-Gehalt, und sind deswegen gleiche Zahlen. (§. 67.)

Lehrsatz. 285. Wenn man eine grössere und eine kleinere Grösse mit einerley dritten dividirt, so kommt auch der erste Quotus grösser als der andere.

Es sey $a > b$ und $\frac{a}{c} = d$ $\frac{b}{c} = e$, so ist $d > e$.

Denn c ist so offt in a enthalten, als 1 in d
und c ist so offt in b, als 1 in e (§. 125.)

Nun aber reichet der Divisor, als ein Maaß, in einer grössern Quantität mehr mahl hin, als in einer kleinern, (§. 127.) Derowegen da c mehr mahl in a stecket als in b, so stecket auch die Unität mehr mahl in d als in e, und daher ist $d > e$. (§. 71.)

Lehrsatz. 286. So man 2 gleiche Grössen, und zwar eine mit einem grössern Divisore dividirt, als die andere, so kömmt der erste Quotus kleiner als der andere.

Wenn $b > c$ und $\frac{a}{b} = d$ $\frac{a}{c} = e$ so ist $d < e$.

Denn eine grosse Mensur reichet nicht so vielmahl hin im Mensurato, als eine kleinere, (§. 127.) Also wie b nicht so vielmahl in a, als c darinnen enthalten ist, so ist auch 1 nicht so vielmahl in d als in e, und daher ist $d < e$. (§. 66. 71.)

Grundsatz. 287. Jede gantze Zahl wird durch sich selbst und durch die Unität ausgemessen.

Es sey eine gantze Zahl $= n$, so ist in ieder Division:

Der Divisor	den Dividendum	die Unität	den Quotum
n gegen	n wie	1 gegen	1
und 1 gegen	n wie	1 gegen	n (§. 125.)

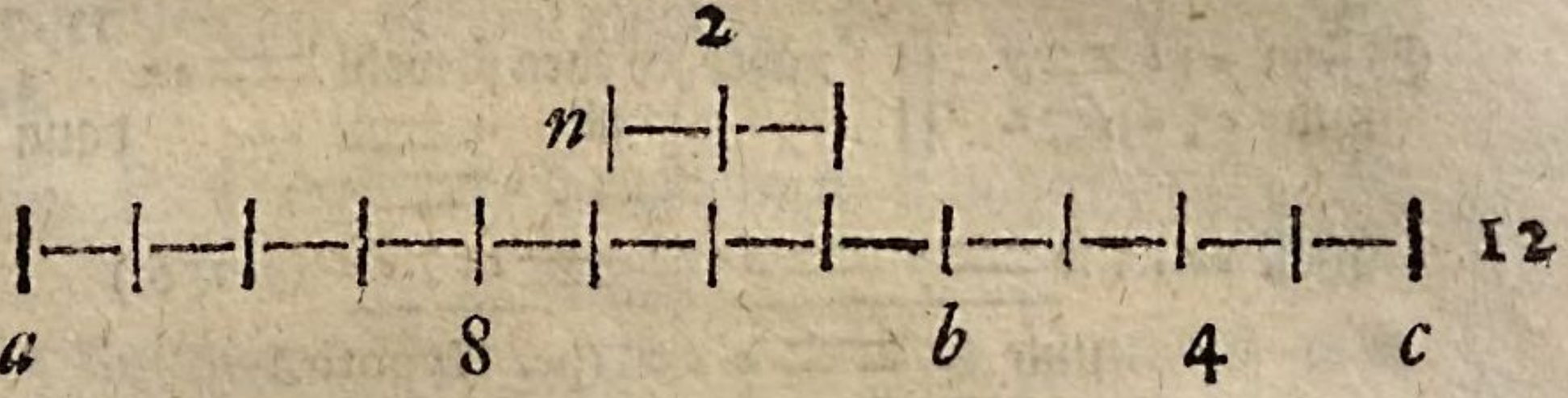
Also bringet sie im ersten Fall allezeit 1, und in andern Fall allezeit sich selbst.

288.

288. Eine Prim-Zahl wird, ausser von sich selbst, nur Zusatz. von der Unität ausgemessen.

Denn eine Prim-Zahl ist eine gantze Zahl (§. 10.) hat keine Factores (§. 282.) und ist $=$ p oder $1p$ (§. 283.) Dahero ist $p:p = 1$ und $p:1 = p$. (§. 125. 131.)

289. Eine Zahl (*n*), so eine gantze (*ac*), und einen von Lehrsatz. ihr hinweg genommenen Theil (*ab*) misset, die misset auch den Rest, (*bc*.)



Nehmlich da die Mensur *n* just etlichemahl aus *a* in *b* reichet, so muß sie auch noch 1 mahl oder just mehrmahl aus *b* vollends in *c* reichen, (denn sonst mässe sie die gantze Zahl *ac* nicht aus,) reichet sie aber noch 1 mahl, so misset *n* sich selbst, (§. 287.) reichet sie just mehrmahl, so ist $bc = en$ welches von *n* durch *e* ausgemessen wird. (§. 127.)

290. Folglich wenn man einen Theil von einer Zahl mit einer dritten kan aufheben, (das ist gäntzlich dividiren,) und den andern nicht, so kan man damit auch die gantze Zahl nicht aufheben. Zusatz.

291. Dahero so die dritte (wie gewöhnlich) > 1 und der andere Theil eine Prim-Zahl ist, so ist das aufheben vergeblich. Zusatz.

Z. E. Wenn 13 und 12 eines theils von 2, 3, 4, oder 6 aufgehoben wird, so kan man 25 damit nicht aufheben.

292. Wenn eine kleinere Zahl die Theile einer grössern beyde oder alle misset, so misset sie auch die gantze grössere. Lehrsatz.

Es seyn die Theile $= T + t$, und die Gantze $= G$. Wenn nun a misset T durch Q, und t durch q, so ist $a\,Q = T$ und $a\,q = t$, (§. 129.) folglich $a\,Q + a\,q = G$ (§. 69.) a aber misset $a\,Q + a\,q$ durch $Q + q$ (§. 240.) folglich misset es auch G durch $Q + q$. (§. 242.)

Z. E. Wenn 3 die Zahl 15 und 27 ausmisset, so misset sie auch 42 aus.

Lehrsatz. 293. Wenn einerley Theile die Gantze, wie auch die Hinweggenommene auseinander sind, so sind solcherley Theile auch die Reste.

Es seyn $a + b = y$ und $c + d = z$ || y aber sey eben so wohl $= ez$ als $a = ec$. dann ist auch $b = ed$.

Weil ez, (so $= y = a + b$) $= ec + ed$ (§. 276.)

und $a = ec$ (per Hypoth.)

so ist $ec + b = ec + ed$ (§. 242.)

Subtr. ec) $b = ed$. (§. 254.)

Lehrsatz. 294. Wenn eine kleinere Grösse eine grössere misset, so misset sie auch alle übrigen, die von der grössern ausgemessen werden.

Als wenn a misset b, und b misset x, so misset a eben auch x. Denn es sey $b : a = c$ so ist $ac = b$. Ferner sey $x : ac = d$, so ist $acd = x$ welches von a durch cd ausgemessen wird.

Nehmlich das Factum derer quotienten ist gleich dem Quoto aus der kleinern Grösse in die allergröste. Welches auf gleiche Art auch von mehrern Ausmessungen erwiesen wird.

Lehrsatz. 295. Wenn eine kleinere Zahl eine grössere ausmisset, und eine dritte misset den ersten Quotum, und eine vierdte den andern Quotum, &c. so misset das Factum aus der kleinern, dritten und vierdten Zahl ꝛc. auch die grössere Zahl, und bringt auf einmahl den letzten Quotum.

Z. E. Wenn die kleinere a misset die grössere b durch c, und d misset c durch e, und f misset e durch g, so misset auch das Factum adf die Grössere durch g. Denn $ac = b$, und $de = c$, und $fg = e$, (§. 129.) Nun substituire man gleiches vor gleiches, kömmt $b = ade = adfg$. (§. 275.) Folglich ist $b : adf = g$. (§. 240.)

296.

296. Demnach kan man statt einer componirten Zahl, Zusatz.
(als 24) nur mit ihren Factoribus 2. 3. 4 oder 6. 4
oder 8. 3 (§. 283.) in eine grössere und deren Quotos di-
vidiren, so kömmt aus dieser Zerstreuung eben derjenige
Quotus, der aus dem unzerstreuten Divisore gekommen
wäre.

297. Unter zwey ungleichbenanten Theilen eines Lehrsatz.
Gantzen, hält der eine Theil so viel Unitäten vom Facto
beyder Nenner, als des andern Theils Nenner Unitäten
hat.

Z. E. Von $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ aus einem Gantzen (15,) hält

15 Theile

$\frac{1}{3}$, 5 Unitäten, oder 5, und $\frac{1}{5}$ hält 3 Unitäten oder
15 Theile.
3 (§. 124.)

Welches überhaupt noch kan also erläutert werden:

So man a mit b dividiret, und der Quotus c ist, so $\frac{1}{b}$

a Theilen.
aus $a = c$ || c aber aus a ist $= c$ (§. 124.)

a Theilen
Ergo ist $\frac{1}{b}$ aus $a = c$. (§. 242.)

Ferner da $bc = a$ (§. 129.)

so ist $\frac{1}{c}$ aus $a = b$

a Theilen.
b aber ist $= b$ (§. 124.)

a Theilen.
Ergo ist $\frac{1}{c}$ aus $a = b$ (§. 242.)

Dieses Theorema dienet unter andern mit dazu, wenn man
ungleichbenante Theile eines Gantzen will unter einerley Be- Anmerck.
nennung bringen, wie es denn balde in der Doctrin derer Brüche
wird seinen Nutzen zeigen.

Erklär. 298. Wenn zwey Zahlen einen gemeinschafftlichen Factorem haben, (der nehmlich grösser als die Unität ist, welche ohndem alle Zahlen ausmisset, §. 287.) so misset er solche beyderseits aus, und heist deswegen das gemeine Maaß, oder Mensura communis, und zwar im engern Verstand, denn die Unität ist das gemeine Maaß von allen Zahlen im weitläufftigen Verstande.

Z. E. ac und ax haben einerley Factorem a, welcher sie beyde durch c und x ausmisset, und deshalber Mensura communis heist, als 15 und 21 sind $=$ 3.5 und 3.7, und werden beyderseits von 3 ausgemessen.

Erklär. 299. Prim-Zahlen in Vergleichung sind, (primi inter se) so keine gantze Zahl, sondern nur die blosse Unität zu ihrem gemeinen Maaß haben.

Also sind 4 und 9 primi inter se, oder in comparatione, weil sie bloß und allein von der Unität gemeinschafftlich ausgemessen werden.

Lehrsatz. 300. Wenn eine Prim-Zahl eine andere Zahl nicht ausmisset, so sind es primi inter se, das ist, sie werden von keiner dritten mehr ausgemessen.

Denn so eine dritte $c > 1$. die andere Zahl a mässe, so müste sie auch die Prim-Zahl messen, (wenn sie nehmlich nicht primi inter se bleiben solten.) Eine Prim-Zahl aber kan durch c nicht gemessen werden, (§. 288.) Und also bleiben sie auch primi inter se.

Z. E. 7 und 24 bleiben primi inter se und können von keiner dritten Zahl gemessen, oder aufgehoben werden.

Zusatz. 301. Demnach kan keiner von allen Factoribus der einen die andere von zwey primis inter se messen.

Also können von 12 und 35, die andere nicht von 2, 3. 4 und 6 und die erste nicht von 5 und 7 ausgemessen werden. Denn mässe einer die andere, so mässe er alle beyde und wären sie nicht primi inter se.

ehrsatz. 302. Primi inter se sind die kleinsten, so dergleichen Quotienten heraus bringen, oder so sich also gegen einander verhalten.

Z. E.

Z. E. Es seyen $a = 4$ und $b = 9$ primi inter se.

Gesetzt nun, es verhielten sich noch 2 kleinere c gegen d wie a gegen b, so muß auch c gegen a seyn wie d gegen b. (§. 272.)

So nun c misset a durch e, so muß auch d messen b durch e. (ex Hypoth.)

So offt nun 1 in c so offt auch e in a und so offt 1 in d so offt auch e in b (§. 125.)

Demnach würde a und b beyderseits von e ausgemessen, und folglich wären sie nicht primi inter se, welches wieder obige Bedingung lieffe.

303. Wenn sich 2 beliebige Zahlen ($c > d$) gegen einander verhalten, wie 2 primi inter se, das ist nach vorigem, wie 2 kleineste in solcher Verhältniß, ($a > b$) so werden die grössern auch von den kleinsten ausgemessen, nehmlich die grössere (a und c,) und die kleinere, (b und d) messen auch einander aus. Lehrsatz.

Denn weil $\frac{a \text{ gegen } b \text{ wie } c \text{ gegen } d}{a \text{ gegen } c \text{ wie } b \text{ gegen } d}$, so ist auch (§. 272.)

Folglich misset a eben so genau, oder wenigstens doch mit eben solchen feinen Theilen das c, wie d von b oder dessen Theilen ausgemessen wird. (§. 267.)

Mit eben solchen Theilen aber kan es nicht geschehen, denn es seyen dergleichen Theile von a und b zwey kleinere gantze Zahlen e und f. So ist

$$\frac{e \text{ so offt in } c \text{ als } f \text{ in } d, \text{ und}}{e \text{ in } f \text{ so offt } c \text{ in } d,} \quad (\text{§. 272.})$$

Oder welches gleich viel, e in f so offt a in b.

Demnach sind a und b nicht die kleinsten in solcher Verhältniß, welches die angesetzte Bedingung zernichtete.

Derowegen da c und d nicht von denen Theilen des a und b, so werden sie von ihnen selbst, und folglich genau ausgemessen.

Z. E. Wenn 36 gegen 16 wie 9 gegen 4, so wird auch 36 von 9 und 16 von 4 ausgemessen.

Lehrsatz. 304. Wenn ein Factum von 2 Factoribus entstanden, und eine dritte Zahl, so mit einem Factore 2 primos inter se abgiebt, misset auch solch Factum, so misset sie auch einen von den ersten Factoribus.

Denn es seyen *c* und *a* primi inter se, wenn nun *c* misset *a b*, so muß auch *c* die Quantität *b* messen.

Man setze den Quot aus $ab : c = d$, so ist $ab = cd$ (§. 129.)

Derowegen ist *a* gegen *c* wie *d* gegen *b*. (§. 271.) *a* und *c* aber sind primi inter se, und die kleinesten in solcher Verhältniß, (§. 302.) Ergo misset *a* das *d* und *c* das *b*. (§. 303.)

Lehrsatz. 305. Ein Factum aus ein- oder zweyerley (absoluten) Prim-Zahlen kan mit keiner andern Zahl, als eben mit seinen Factoribus, (mit 1 und mit sich selbst,) ausgemessen werden.

Denn wenn solch Factum noch von einer andern Zahl gemessen würde, so müste sie auch einen von den Factoribus messen, (§. 300 und 304.) Beyde Factores aber sind Prim-Zahlen, so von keiner andern gemessen werden, (§. 288.) Ergo kan solch Factum auch keine andere Zahl messen.

Anmerck. 306. Denn ob es zwar als eine gantze Zahl auch durch sich selbst und 1 gemessen wird, (§. 287.) so giebt es doch in Rechnungs-Vortheilen gar selten Nutzen, und ist dieses ohne dem bey allen gantzen Zahlen schon vor sich zu verstehen.

Anmerck. 307. Wie man dergleichen Prim-Factores aus ihrem daher entstandenen Numero compositowieder finden könne, wird man im andern Theil von Potentz-Zahlen hierzu eine dienliche Regul geben, und können solche auch aus dem Triangulo Primorum, (der im Anfang der angehengten Tabularum Arithmeticarum stehet,) so gleich erkannt werden.

Erklär. 308. Das gemeine gröste Maaß ist, so 2 oder mehr Zahlen auf Numeros primos inter se reduciret, oder das 2 oder mehr Zahlen also aufhebt, daß sie weiter kein gemein Maaß, als die Unität haben.

17. Aufgabe.

309. Das gemeine gröſte Maaß zweyer Gröſſen zu finden, und zwar in abgetheilten Zahlen. 17. Aufgabe.

1.) Dividire man die grössere durch die kleinere, und so der Quot eine gantze Zahl, so ist die kleinere das gemeine Maaß.

2.) Wenn nach der ersten Division ein Rest bleibet, so theile man den ersten Divisorem mit dem ersten Rest, und so wieder ein Rest bleibet, dividire man den andern Divisorem mit dem andern Rest, und so ein dritter Rest bleibt, theile man den dritten Theiler mit dem dritten Rest, und so weiter, so nun alles aufgehet, ist der letzte Divisor, (oder welches einerley, der letzte Rest,) das gemeine Maaß der gegebenen zweyen Gröſſen.

Exempel auf No. 1.

Das gemeine Maaß von 203 und 29 ist 29.

& 203 (7 29

No. 2.

Man suche das gemeine Maaß zu 231 und 308. Fac. 77.

x (77 308 (1 231 x 3 x (3. 77 x

No. 3.

Man suche das gemeine Maaß von 592 und 481. Fac. 37.

(111=c	(3
Es sey a=592(1=p	4(7=e z
und b=481	481(4=f zzz(3=t
	zzz=c e=3z

das ist:

(c	(e	
a(p	b(f	c(t
b	c	e

Beweiß.

Uberhaupt: Wenn die grössere Zahl a, die kleinere b, der erste Rest c, der erste Quot p, der andere Rest e, der andere Quotus f, und der dritte Quot t, so muß e das gemeine Maaß von a und b seyn.

Vermöge der Division ist

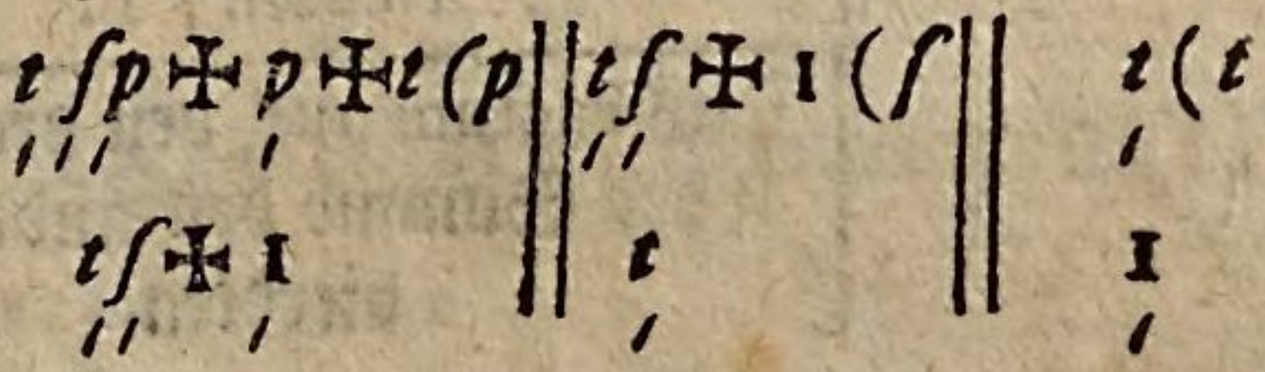
$bp+c=a \;||\; cf+e=b \;||$ und $et=c$. (§. 129. 133.)

Nun substituire man einen Valorem vor den andern, so ist $etf+e=b$ und $etfp+ep+et=a$, beyde mit e dividirt, geben $tf+1$ und $tfp+p+t$.

Demnach misset e, als ein gemeinschafftlicher Factor von a und b beyde durch die letzt gefundene Quotos aus, und daher ist e das gemeine Maaß von a und b. (§. 298.)

Daß aber e auch zugleich das gemeine gröste Maaß sey, wird man daraus sehen, wenn die letztgefundenen Quoti

Quoti numeri primi inter se seyn, und nur noch von der blossen Unität gemeinschafftlich ausgemessen werden. Dahero suche man nach vorhergehenden noch ihr gemein Maaß:



Und da das gemeine Maaß 1 ist, sind die gefundenen Quotienten Prim-Zahlen in Vergleichung, (§ 299.) und e communis Mensura maxima (§. 308.)

310. Insgemein regardiret man in diesem Problemate die Quotienten also gar nichts, man kan sie aber dennoch gebrauchen, und aus ihnen die aufgehobenen oder primos inter se, (folglich) die kleinsten in solcher ration (§. 302.) nach der Vielheit der Divisionen also gleich herstellen. Anmerck.

18. Aufgabe.

311. **Die kleinsten Zahlen in solcher Verhältniß so gleich aus den Quotienten der grössern zu** determiniren. 18. Aufgabe.

α.) Nach einer Division sind sie der Quotient und 1.

β.) Nach zwey Divisionen sind sie { Das Factum aus dem ersten und andern Quot † 1. / Und der andere Quot.

γ.) Nach drey Divisionen sind sie { Das Factum aller (3) Quotienten † der Summe der beyden äussersten Quotienten. / Das Factum der beyden letzten Quotienten † 1.

δ.) Nach 4 Divisionen sind sie { Das Factum aus allen † dem Facto des ersten und andern † dem Facto des ersten und 4ten † dem Facto des dritten und 4ten Quotienten † 1.

Das Factum aus den drey letzten † der Summe des andern und vierdten.

Und also weiter.

Zum Exempel:

α.) Von 203 und 29 sind die kleinsten 7 und 1.

&

29) 203 (7 Quotus.

β.) Von 308 und 231 sind sie 4 und 3.

231 (77
77) 231) 308 (1 (3

1.3 + 1 = 4 und hiezu ist der andere Quot 3.

γ.) Von 592 und 481. sind die primi inter se 16 und 13.

37) 111) 481) 592 (1 (4 (3
111 47 111
3

1.4.3 = 12 2.4 = 12
1+3 = 4 + 1
16. 13.

δ.) Von

δ.) Von 308 und 92 sind die kleinsten sich also verhaltende, 77 und 23.

2

4 3 8 3 2

4)28)32)92)308(3(2(1(7

3.2.1.7 = 42

3.2 = 6

3.7 = 21

1.7 = 7

+1

77.

2.1.7 = 14

2+7 = 9

23

Beweiß.

α.) Nach einer Division giebt:

(b

a (p und ist $bp = a$ und $\frac{bp \mid p}{b \mid 1}$ (§. 270.)

a'

b

b'

β.) Nach 2 Divisionen giebt

c

a (p b (f und $cf = b$, desgleichen $bp + c = a$

a' b'

b c

b' c'

(e

Folglich ist $\frac{a = cfp + c}{b = cf} \mid \frac{fp + 1}{f}$ (§. 270.)

γ.) Nach 3 Divisionen giebt

$$\begin{array}{cccc} c & e & & \\ a(p & b(f & c(t & \text{und da ist nach vorigen} \\ \prime & \prime & \prime & \\ b & c & e & \\ \prime & \prime & \prime & \end{array}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{etfp+ep+et}{etf+e} \Big|_{=} \frac{tfp+p+t}{tf+1} \quad \begin{matrix}(e \\ (\text{§. 270.})\end{matrix}$$

δ.) Nach 4 Divisionen giebt

$$\begin{array}{cccc} c & e & f & \\ a(p & b(f & c(t & e(q \\ \prime & \prime & \prime & \prime \\ b & c & e & f \\ \prime & \prime & \prime & \prime \end{array}$$

Und da ist, wenn man $bp+c$ vor a, $cf+e$ vor b &c. substituiret:

$$\frac{a}{b} = \frac{fqtfp+ffp+fqp+fqt+f}{fqtf+ff+fq} \Big|_{=} \frac{qtfp+fp+qp+qt+1}{qtf+f+q} \quad \begin{matrix}(f \\ \text{§. 270.} \\ \text{&c.}\end{matrix}$$

§. 312. Wie man das gemeine Maaß (§. 400.) noch auf eine kürtzere Manier erfinden, desgleichen bald sehen könne, mit welchen einzelen Zahlen sich die grössern auf kleinere reduciren lassen, soll unten nach der Doctrin der Brüche angewiesen werden, nehmlich §. 373. seqv.

19. Aufgabe.

19. Aufgabe.

313. Das gemeine Maaß, oder den gemeinen grösten Theiler zu finden in unabgetheilten Zahlen.

1.) Bey incomplexen Grössen lösche man auf einer Seite so viel gleiche Factores aus, als auf der andern, so giebt das Factum der ausgelöschten das gemeine Maaß, die überbliebenen unausgelöschten aber, sind die Quoti.

2.) Bey

2.) Bey complexen Quantitäten, muß man die kleinere suchen in simplere complexe zu resolviren, denn zuweilen siehet man bald, welche so wohl auf einer, als auch auf der andern Seiten divisibel ist, zuweilen aber ist es nicht so leicht abzusehen, und da muß man sich einiger Vortheile bedienen, als:

3.) Man muß von einer, der gegebenen complexen, die Helffte, das Drittel ꝛc. nehmen, und hiermit in die andere nach der 17. Aufgabe dividiren, oder, wo sichs schicket, hebt man auch alle Zehler der gegebenen complexen Grössen zuvorhero auf, und suchet alsdenn zu den aufgehobenen das gemeine Maaß, nach ermeldter Aufgabe, welches iedoch zuletzt mit dem hierzu gebrauchten Divisore noch zu multipliciren ist.

4.) Daferne der erste Quotus ein Bruch wird, so fället die weitere Division mehrentheils verdrießlich, und deswegen multiplicire man nur den Dividendum mit dem Nahmen solches Bruchs, dann kan man mit seinem Zehler, als einer gantzen Zahl in solch Multiplum dividiren.

Exempel auf No. 1.

Man soll von $\overset{1}{a}\overset{1}{b}c^2\overset{1}{f}$ und $\overset{1}{a}\overset{1}{d}\overset{1}{b}c^2\overset{1}{g}$ das gemeine Maaß finden. So ist es abc^2 und die Quoti sind f und dg.

Also

Also auch von

a^4b^2dx und a^2b^3cd, ist mens. commun. || und die Quoti sind bc und a^2x

a^2 b a^2b^2d

Oder wie man es sonst zu setzen pflegt:

$$\begin{array}{r|l} a^2b^3cd & (a^2b^2d \\ \hline a^4b^2dx & bc \\ \hline & a^2x \end{array}$$

Auf No. 2.

Es sey der gröste Divisor aus denen zwey gegebenen unabgetheilten Zahlen.

$a^2+ac-ad-dc$ und $2ax^2+abx-2dx^2-dbx$

zu bestimmen, so resolvirt man die kleinere in die zwey simplern complexen $a+c$ und $a-d$, und siehet, ob damit in der grössern zu dividiren stehe. Mit $a+c$ kan es nicht geschehen, weil in der andern gar kein c zu erblicken, derowegen versuche man es durch $a-d$, so gehet das Aufheben von statten, und kömmt:

$$\begin{array}{r|l} a^2+ac-ad-dc & (a-d \\ \hline 2ax^2+abx-2dx^2-dbx & a+c \\ \hline & 2x^2+bx \end{array}$$

Auf No. 3 und 4.

Man suche das gröste Maaß, aus denen 2 Quantitäten.

$5abc+5cb^2-5ac$ und $2aby+2b^2y-2ay$.

Man

Man nehme der kleinern Helffte, dividire damit in die grosse.

Z. E.

$$\begin{array}{l|l} 5abc+5cb^2-5ac & 5c \\ \hline aby+b^2y-ay & y \end{array}$$

Da nun alles aufgehet, ist der Divisor mensura communis maxima. Es ist aber der Quotus $\frac{5c}{y}$ noch einmahl so groß gekommen, derowegen da man mit $2aby+2b^2y-2ay$ hätte dividiren sollen, so nehme man ihn nur halb so groß, nehmlich $\frac{5c}{2y}$. Und demnach sind die kleinsten Zahlen, so sich wie die ersten zwey Quantitäten gegen einander verhalten $\frac{5c}{2y}$ und 1.

(§. 311.)

Oder wenn man sie in gantzen Zahlen haben will, (wenn nehmlich $5c$ mit $2y$ nicht kan gäntzlich dividiret werden) sind die kleinsten $5c$ und $2y$. Denn so man $\frac{5c}{2y}$ und $\frac{1}{1}$ beyderseits mit $\frac{2y}{1}$ multiplicirt, kommen $\frac{2y5c}{2y}$ und $\frac{2y}{1}$ so sich eben so verhalten wie die multiplicirten (§. 269.) $\frac{2y5c}{2y}$ aber ist $=\frac{5c}{1}$ (§. 270.) Folglich verhalten sich die kleinsten gegen einander wie $5c$ gegen $2y$. (§. 126.)

Es sollen aus $(a^3-b^3):(a^2-b^2)$ das gemeine gröste Maaß, und die kleinsten in solcher Verhältniß ausgemacht werden.

Man

Man dividire wie gewöhnlich:

$ab^2-b^3)\ a^2-b^2)\ a^3-b^3(a \qquad \left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}\right.$

$+ab \qquad +ab^2$

Dahero ist ab^2-b^3 das gemeine gröste Maaß. (309. §.) Nun bestehen die kleinsten aus dem Facto beyder Quotienten + 1 und dem andern Quotienten. (§. 311. B.) Derowegen multiplicire man beyde in einander, und addire 1, kommt

$$\left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}\right).\frac{a}{1}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+\frac{1}{1} \text{ gegen } \frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}$$

Diese allerseits mit $\frac{b^2}{1}$ multiplicirt, geben

$$\frac{aab^2}{b^2}+\frac{ab^2}{b}+\frac{b^2}{1} \text{ gegen } \frac{ab^2}{b^2}+\frac{b^2}{b} \quad \text{(§. 269.)}$$

Welche eben so, wie a^2+ab+b^2 gegen $a+b$. (§. 270.)

So man aus $(4x^2-x-3):(x^2-3x+2)$ communem mensuram maximam finden wolte, dividire man die erste mit der andern, und den Divisorem mit einem aufgänglichen Theil des Residui, (wenn man mit dem gantzen Residuo nicht füglich dividiren kan.)

$x-1)\ x^2-3x+2)\ 4x^2-x-3(\ 4(x-2$

$-2x \qquad +11x-11$

Da der Divisor 11 mahl kleiner genommen, ist der letzte Quotus 11 mahl zu groß, derowegen ist der wahre letzte Quotus $\frac{x-2}{11}$ — $\frac{-2}{11}$. Und demnach ist 11x-11 mens. commun. maxima.

Nun bestehen die kleinsten Termini nach zwey Divisionen aus dem Facto beyder Quotienten + 1, und dem andern Quotienten, (§. 311. β.)

Nehmlich: $\frac{4x-8}{11}$ — $\frac{11}{11}$ + $\frac{11}{11}$ und $\frac{x-2}{11}$ — $\frac{-2}{11}$, das ist, wenn man beyderseits mit 11 multiplicirt, aus 4x + 3 und x-2 (§. 269. 270)

Endlich kan nicht umhin des Herrn de Crousaz * Manier noch zu gedencken, wobey zugleich die Brüche vermieden werden, z. E. Wenn aus

$12x^3 - 48x^2 + 60x - 4$ / $-48x^2 + 120x - 72$

das gemeine gröste Maaß soll gefunden werden, so hebt man erstlich mit 12 auf, kommen:

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ / $-4x^2 + 10x - 6$

Diese hebt man wieder mit 2. auf:

2) $-2x^2 + 5x - 3$

Und hiermit dividirt man

in $x^3 - 4x^2$ &c. kömmt $\frac{x}{-2}$

Um den Bruch zu vermeiden, multiplicire man den Dividendum mit —2, kömmt.

$-2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$ Hierein divid. mit $-2x^2+5x-3$ giebt den Quot x,

$3x^2 - 7x$ Ferner den Quot $\frac{3}{-2}$ mit

$(-2$ dessen Nenner den Dividuum multiplicirt, und ferner divid. giebt

$-6x^2 + 14x - 8$

Restirt $= = = = x + 1$ Endlich den Quot 3.

---

* Mehr dergleichen Compendia im Aufheben wird man finden in seinem Traité d' Algebre pag. 51. seq.

Mit

Mit diesem Rest dividire man den Divisorem:

$-x+1)\ -2x^2+5x-3\ (2x-3$ gehet auf.

$3x$

Dahero ist $-x+1$ wenn es (wegen des ersten Aufhebens) mit 12 multiplicirt wird,

Nehmlich: $-12x+12$ com. mens. maxima.

Beweiß.

1.) Was die ordentliche Operation anlanget, ist diese schon in der 17. Aufgabe bewiesen.

2.) Und so die eine Quantität gar keine Speciem mehr mit der andern gemein hat, so kan man sie auch nicht weiter in einander dividiren. (§. 240. 4)

3.) Daß man aber zuweilen das gemeine Maaß von der gegebenen Zahlen Helffte, Drittel, Viertel ꝛc. suchet, geschiehet der Leichtigkeit wegen; Denn misset es einen aufgänglichen Theil von ihnen aus, so misset es sie auch gantz aus. (§. 294.)

4.) Ferner wenn ein Divisor multiplus $= ed$ in a dividirt, zum Quotienten q giebt, so giebt der einfache Divisor $= d$, mit dem man a misset, im Quotienten eq.

Denn $a = edq$, und $\frac{edq}{d} = \frac{eq}{1} = eq$. (§. 270.)

Oder so der einfache Divisor $= d$ in a dividirt zum Quot q giebt, so giebt ein Divisor multiplus $= ed$ aus eben solchem Dividendo im Quot $\frac{q}{e}$. Denn es sey $a : ed = p$, so ist $edp = a = dq$. (§. 125.) und $p = \frac{dq}{ed} = \frac{q}{e}$ (§. 270.) Ist der erste Quot $\frac{q}{n}$ so ist der andere $\frac{q}{en}$. Denn wie sich verhält $\frac{q}{n}$ gegen $\frac{q}{en}$ so verhält sich auch $\frac{q}{n}$ gegen $\frac{q}{1}$. (§. 271.)

Um

Um die Brüche zu vermeiden, nimmt man statt manches Dividendi sein Multiplum, denn hebt der Divisor alle partes des Multipli auf, so dividirt er auch alle partes des einfachen Dividendi genau, ob schon der Quotus nach dem Nahmen solches Multipli so viel kleiner, als zuvor kommt.

Z. E. Wenn $ed + ef$ den Dividendum $md + mf$ nicht so stracks augenscheinlich genau dividirt, gleichwohl aber das Multiplum Dividendi $emd + emf$ gäntzlich ausmisset durch m, so misset es auch den einfachen Dividendum durch $\frac{m}{e}$ aus. Denn da $ed + ef$ gegen $emd + emf$ wie 1 gegen $\frac{m}{e}$ (§. 125.) so ist $ed + ef$ gegen $md + mf$ wie 1 gegen $\frac{m}{e}$ (§. 270. oder 271.)

314. Man kan auch aus beyden, oder mehrern vorgegebenen Quantitäten alle Divisores finden, so zeigen die gröſten, so beyden oder allen gemeinschafftlich sind, eben auch das gemeine gröſte Maaß, wovon im folgenden. Anmerck.

Von den Theilern, (Divisoribus) und zulänglichen Theilen, (Partibus aliquotis) der Zahlen.

315. Weil ein Theil von einem Gantzen allezeit weniger, als dasselbe ist, so kan der gröſte Divisor einer Zahl, (nehmlich sie selbst, s. 287.) kein Pars aliquota davon seyn, (§. 76.) Anmerck.

Z. E. von 12 sind die Divisores 1, 2, 3, 4, 6, und 12, und die Partes aliquotæ nur 1, 2, 3, 4 und 6.

316. Folglich ist die Anzahl der partium aliquotarum allezeit um 1 geringer, als der Divisorum, das ist: Zusatz.

Wenn aus n der Numerus Divisorum $= ed$, so ist der Numerus partium $= (e-1)p$. Also hat 1 einen Di-

visorem,

visorem, aber keinen partem aliquotam, und eine Prim-Zahl hat nicht mehr, als 2 Theiler, und einen zulänglichen Theil. (§. 288.)

Zusatz. 317. Also hat ein compositus (pp oder p^2) aus einerley 2 Prim-Zahlen, nur 3 Divisores, 1, p und pp und zwey partes aliquotas 1, und p (§. 305.) Ein mehr componirter, als ppp oder p^3 hat einen Divisorem, nehmlich sich selbst mehr, und deswegen nur 3 partes aliquotas.

Zusatz. 318. Demnach haben die Facta aus einem in sich selbst multiplicirten primo iederzeit einen Divisorem mehr, als ihr exponente Unitäten.

Z. E. 7.7.7. oder 7^3 hat einen Divisorem mehr, als der Exponente der Wiederhohlung, (3.) anzeigt, nehmlich 4. als:

(1.) (7.) (7.7. oder 49) und (7.7.7 oder 343)

Das ist überhaupt, wenn p ein primus, d ein Divisor, und a eine aliquota (pars) so ist von p^n der Numerus Divisorum $=$ $(n+1)\,d$, und aliquotarum $n\,a$. (§. 316.)

Lehrsatz. 319. Ein compositus, so aus zweyerley primis entstanden, hat (wegen der Diversen Factorum, (einen Divisorem mehr, als der, so aus einerley primis entsprungen, (§. 305)

Z. E pP hat 1. p. P und pP zu seinen Theilern, da pp nur 1 p und pp hat.

Zusatz. 320. Daher giebt $pP.\pi$ (nehmlich mit einem dritten primo π multiplicirt, mehr Divisores, als $pp\pi$. Denn im ersten Fall kan man 4) 1 | p | P | pP allerseits mit π multipliciren, kommen: π | $p\pi$ | $P\pi$ | $pP\pi$, und also 8 Divisores. Im andern Fall aber sind nur 3) 1 | p | pp mit π zu multipliciren: π | $p\pi$ | $pp\pi$, und kommen also nur 6 Divisores.

Zusatz. 321. Folglich geben 2 componirte einerley primi, wenn sie mit einem Dritten vermehret werden, allemahl einen

einen Perpendicul weniger in Diviſoribus, als zwey componirte unterſchiedne primi.

322. Ein aus 3 verſchiedenen primis componirter giebt 8 Diviſores (§. 320.) ieden Diviſorem kan man mit einem neuen primo wiederum multipliciren, und ſo haben die aus 4 unterſchiedenen primis componirte 16 Diviſores, die aus 5 haben 32, aus 6 haben 64 ꝛc. Zuſatz.

323. Hingegen haben die aus 3 einerley primis componirte, nur 4 Diviſores, (§. 317. 318.) ieden Diviſorem kan man mit einen neuem primo multipliciren, und daher hat p^3P 8 Diviſores, p^4P hat 10, $p^5\pi$ hat 12 ꝛc. Woraus man ſiehet, daß dieſe nur um 2, jene Diviſores aber zweyfach wachſen. Zuſatz.

324. Dahero darff man nur die Exponenten ſolcher einzelen primorum dupliren, und in einander multipliciren, ſo wird der Anwachs derer Diviſorum eben auf dieſe Art erſcheinen, als: Lehrſatz.

p^1P^1 giebt 2 . 2 oder 4 nehmlich 1. p. P. pP.

$p^1P^1\pi^1$ giebt 2 . 2 . 2. oder 8. 1. p. P pP / π $p\pi$ $P\pi$ $pP\pi$.

$p^1P^1\pi^1p^1$ giebt 2.2.2.2, oder 16. &c.

1	p	P	pP
π	$p\pi$	$P\pi$	$pP\pi$
p	pp	Pp	pPp
πp	$p\pi$p	$P\pi$p	$pP\pi$p &c.

p^2P^1 giebt 3 . 2 oder 6

1	p	pp	
P	pP	ppP	

p^3P^1 giebt 4 . 2 oder 8.

1	p	p^2	p^3	
P	pP	p^2P	p^3P	

p^4P^1 giebt 5 . 2 oder 10. &c.

1.	p	p^2	p^3	p^4	
P	pP	p^2P	p^3P	p^4P.	&c.

Lehrsatz. 325. Auf gleiche Weise, so man weiter gehet, und die Compositos wieder componiret, bleiben die Divisores noch immer in der Anzahl, die die Exponenten ieder + 1 in einander multiplicirt, herausser bringen, als p^3P^2 durchs multipliciren componirt, giebt $(3+1).(2+1) = 4.3 = 12$ Divisores.

Denn so man die 4 Divisores der ersten Quantität (p^3) (§. 318.) grade unter einander, der andern nur ihre 2 (wenn 1 multipiicirt nicht,) in der Gestalt eines Winckelhackens oben hinan setzt, und den ersten Perpendicul mit der andern ihren Divisoribus successivè hindurch multiplieiret, so kommen alle Divisores nach der Reihe, und kan keiner entwischen.

Z. E. Wenn $p = 3$ und $P = 5$, so kommen alle Divisores von p^3P^2 oder $(27.25 =)$ 675

In Buchstaben:

1	P	P^2
p	pP	pP^2
p^2	p^2P	p^2P^2
p^3	p^3P	p^3P^2

In Zahlen:

1	5	25
3	15	75
9	45	225
27	135	675.

Zusatz. 426. Und daraus ist leicht zu erachten, daß $p^3P^2\pi^1$ muß 24 Divisores geben. Denn ieden von vorigen 12 kan man vom neuen durchgehends mit π multipliciren, und so nach bringen auch hier die Exponenten, ieder + 1 in einander multiplicirt, (nehmlich $4.3.2 = 24$, die Anzahl der Divisorum.

Zusatz. 327. Käme nun noch ein neuer primus $= p$ Multiplicando dazu, so würden alle 24 wiederum vom neuen damit können vermehret, und also 48 Divisores hergestellet werden, nehmlich $p^3P^2\pi^1p^1$ bringt

$(4.3.2.2)$ Das ist 48. Divisores.

Welches aber bey π^2 nicht so hoch kan hinan steigen, sintemahl diejenigen aus einerley primis, einen Perpendi-

cul

cul weniger haben (§. 321.) Dahero wenn $p^3P^2\pi^1p^1$ 4 mahl 12, so bringt $p^3P^2\pi^2$ nur 3 mahl 12, das ist: 4.3.3 oder 36 Divisores, wie aus folgenden Schemate gar deutlich zu ersehen ist:

1	π	π^2
p	$p\pi$	$p\pi^2$
p^2	$p^2\pi$	$p^2\pi^2$
p^3	$p^3\pi$	$p^3\pi^2$
P	$P\pi$	$P\pi^2$
pP	$pP\pi$	$pP\pi^2$
p^2P	$p^2P\pi$	$p^2P\pi^2$
p^3P	$p^3P\pi$	$p^3P\pi^2$
P^2	$P^2\pi$	$P^2\pi^2$
pP^2	$pP^2\pi$	$pP^2\pi^2$
p^2P^2	$p^2P^2\pi$	$p^2P^2\pi^2$
p^3P^2	$p^3P^2\pi$	$p^3P^2\pi^2$

Denn weiter kan man den andern Perpendicul mit π^2 nicht multipliciren, denn sonst käme π^3, welcher Divisor aber den gegebenen Compositum nicht mit ingrediret.

Und hieraus folget, (wie Wallisius schon angemercket. *)

Die 20. Aufgabe.

328. Aus denen gegebenen Simplis oder Compositis der Prim-Zahlen den Numerum Divisorum des daraus entstandenen Haupt-Facti zu determiniren. 20. Aufgabe.

Man multiplicire aller Exponenten, ieden aber um 1 grösser genommen, in einander, so giebt ihr Factum die Anzahl der Theiler des Haupt-Facti.

* Vid. Wallisii Discourse of Combinations, Alternations and aliquot Parts p. 102. f.

Z. E. So man aus p^4 und P^3, desgleichen π^2 ein Haupt-Factum, oder den compositum $p^4P^3\pi^2$ bekommen, so multiplicire man 5 mit 4, und was heraus kömmt, mit 3, dann giebt das letzte Product, (60) die Anzahl aller seiner Divisorum:

5 . 4 . 3
20 60

Also erfinde man auch des aus den Elementis $2^4, 3^3$, und 5^2 entstandenen Compositi $2^43^35^2$, (oder 10800,) sämmtliche Anzahl der Divisorum und Partium aliquotarum.

Man multiplicire 5 . 4 . 3

4 + 1 mit 3 + 1, und 20 60
das Factum mit 2 + 1 Facit: 60 Divisores

Und 59. part. aliqv. (s. 316.)

21. Aufgabe.

21. Aufgabe. 329. **Aus einer gegebenen abgetheilten Zahl den** Numerum Divisorum **und** part. aliqv. **zu finden, wie auch solche ordentlich herzustellen.**

1.) Dividire man die gegebene Zahl mit denen Prim-Zahlen 2. 3. 5. 7. 11. 13. ꝛc. und die Quotos wieder mit solchen, so lange biß man auf die Unität kömmt.

2.) Gebe man denen gebrauchten Prim-Zahlen ihre gehörige Exponenten, und hieraus erfinde man nach vorhergehender Aufgabe die Divisores.

3.)

3.) Rangire man die Divisores aus dem Composito der vorhergehenden Elementen, in einen Perpendicul, und multiplicire ihn nach obigem 325 und 327. §. mit denen Divisoribus des letzten Elementi, so kommen sie auch in ihrer Ordnung, und zugleich die partes aliquotæ biß auf den letzten.

Z. E. Aus 24200 suche und setze man alle Divisores und zulängliche Theile:

24200	12100	6050	3025	605	121	11	1
2	2	2	5	5	11	11	

So kommen die Primi mit ihren Exponenten: $2^3 5^2 11^2$ welche 4.3.3 oder 36 Divisores und 35 zulängliche Theile geben.

Nun stelle man die Divisores von $2^3 5^2$ in einen Perpendicul, und multiplicire ihn mit den beyden Divisoribus vom letzten Elemente 11^2 nehmlich 11. und 121. so kommen alle Divisores und partes aliquotæ in völliger Ordnung.

1	11	121
2	22	242
4	44	384
8	88	968
5	55	605
10	110	1210
20	220	2420
40	440	4840
25	275	3025
50	550	6050
100	1100	12100
200	2200	24200

Anmerck. 330. Wenn die Primi als Divisores höher anwachsen, und nicht so gleich in die Augen fallen, bediene man sich meiner Anatomiæ Numerorum, so hinten in Tabulis Arithmeticis mit angehenget.

22. Aufgabe.

22. Aufgabe. **331. Aus einer unabgetheilten Zahl alle Divisores und Partes aliquotas heraus zu bringen.**

1.) Dividire man sie mit denen erstern und simplern Factoribus, so lange es angehet, und die Quotos wieder mit denselbigen, biß man auf 1 kömmt.

2.) Gebe man denen gebrauchten Factoribus die gehörigen Exponenten der Wiederhohlung, und aus solchen Exponenten determinire man (nach vorhergehenden 328 und 329. §.) die Anzahl der Divisorum, so ist die Anzahl der partium aliquotarum um 1 geringer.

3.) Sollen auch alle zum Vorschein kommen, so ordne man sie, wie im vorigen Problemate geschehen.

Z. E. Man soll aus $aabbbc$ dergleichen finden:

$\frac{aabbbc}{a}$	$\frac{abbbc}{a}$	$\frac{bbbc}{b}$	$\frac{bbc}{b}$	$\frac{bc}{b}$	$\frac{c}{c}$	$\frac{1}{1}$

Oder welches man gleich Anfangs sehen können, man substituire $a^2b^3c^1$, so ist der Numerus Divisorum $= 3.4.2 = 24$, und der aliquotarum $= 23$.

Des-

Desgleichen ordne man sie wie oben in Zahlen:

1	c
a	ac
aa	aac
b	bc
ab	abc
aab	aabb
bb	bbc
abb	abbc
aabb	aabbc
bbb	bbbc
abbb	abbbc
aabbb	aabbbc

Eben auch, so man die Divisores aus $a^3b+a^2b^2$ determiniren wolte:

$a^3b+a^2b^2$	a^2b+ab^2	$ab+b^2$	b	1
a	a	$a+b$	b	

Demnach ist $((a^2.(a+b)^1.b^1)) = aaab+aaabb.$

And der Numerus { Divisorum = 3.2.2 = 12
aliquotarum = 11.

Will man sie herstellen, so setze man:

1	b
a	ab
aa	aab
a+b	ab+bb
aa+ab	aab+abb
aaa+aab	aaab+aabb.
6	6

+

Anmerck. Mehr davon sammt ihrem Gebrauch kan man beym Bartholino * nachsehen, und wie man aus solcherley Quantitatibus magis compositis die Divisores finden soll, hat Herr Phil. Naudé Jun. eine zulängliche Regul gegeben, ** und zugleich ihren guten Nutzen in Constructionibus Geometricis angewiesen.

Von der kleinsten Zahl, (Dividuo minimo) so durch 2 oder mehr Zahlen ausmeßlich oder divisibel ist.

Lehrsatz. 332. Wenn man 2 primos inter se, (das ist, die kleisten in solcher Verhältniß (§. 302.) mit einander multiplicirt, so ist das Factum auch die kleinste Zahl, so sie ausmessen.

Es seyen $a = 6$ und $b = 5$ primi inter se, so ist $ab = 30$ die kleinste Zahl, so von ihnen beyderseits ausgemessen wird.

Wenn es möglich, werde noch eine kleinere Zahl x von a und b gänzlich ausgemessen durch die kleinern ganzen Zahlen y und z. (§. 285.) so ist $ay = x = bz$ (§. 129.) Dahero ist: a gegen b, wie z gegen y (§. 271.) Folglich bleiben a und b nicht die kleinsten in solcher Verhältniß, welches wieder obige Bedingung lieffe.

Zusatz. 333. Auf gleiche Art kan man auch erweisen, daß das Factum aus mehrern primis inter se der kleinste Dividuus vor sie sey.

Lehrsatz. 334. Wenn 2 Compositi durchs gemeine Maaß auf primos inter se reducirt werden, so ist das Factum der äussersten oder mittelsten die kleinste, so sie ausmessen.

Es seyen ab und ad compositi, und die (durchs gemeine Maaß a reducirten) Minimi b und d. (§. 313.) so ist ab gegen ad wie b gegen d (§. 269.) Das Factum der mittelsten adb ist gleich

---

* Vid. Bartholini Princ. Mathes. Univers. p. 32. s.

** Vid. Miscellanea, Berolinensia p. 166. s. It. Contin. I. pag. 66. seqv. Desgleichen in des Herrn Gravesands Elem. Mathes. Universalis pag. 26. s. & in ejusd. Comment. in Newtoni Arith. Univ. p. 177. seqv.

dem

dem Facto der äussersten *abd* (§. 274. und 273.) welches so wohl von *ab* als *ad* ausgemessen wird.

Gesetzt nun, beyde Compositi mäßen noch eine kleinere x durch y und z aus, so wäre

$$ab.y = x \text{ und } ad.z = x \quad (§.\ 129.)$$

Folglich wäre *ab* gegen *ad* wie z gegen y (§. 271.) oder welches eins, wie *b* gegen *d* also auch z gegen y. (§. 270.) Nun sind *b* und *d* minimi in solcher Verhältniß, (§. 302.) Dahero müste auch z von *b* und y von *d* ausgemessen werden, (§. 303.)

d aber ist gegen y wie *abd* gegen $aby = x$ (§. 269.)

Wird nun y von *d* ausgemessen, so wird auch die kleinere x von der grössern *abd* ausgemessen, welches nicht geschehen kan.

23. Aufgabe.

335. **Zu 2 gegebenen Zahlen die ausmeßliche kleinste, (Dividuum minimum) zu finden.** 23. Aufgabe.

1.) Wenn es primi inter se, multiplicire man eine mit der andern, so giebt das Factum den minimum. (§. 332.)

2.) Sind es Compositi, reducire man sie durchs gemeine Maaß auf primos inter se, (nach) der 17. 18. und 19. Aufgabe.) und multiplicire davon

den { kleinsten, / grösten, } mit dem { grösten / kleinsten } Composito,

so giebt das Factum den minimum. (§. 334.)

1.) Z. E. Man erfinde zu 19 und 84 die ausmeßliche kleinste

756

Facit: 1596 (§. 300.)

2.) Man suche zu 308 und 231 den Dividuum minimum.

a ad ab

mens. mxa. = 77) 231 (3) 308 (1 (3

2 x 77

Dem

Demnach sind die primi inter se $(1+3) \overset{b}{=} 4$ und $3 \overset{d}{}$ (§. 311. β)

Und also Dividuus min. $= 924 = adb = abd$.

Lehrsatz. 336. Wenn 2 Zahlen beyderseits eine dritte Zahl messen, so wird auch solche durch ihre ausmeßliche Kleinste wieder ausgemessen.

Es seyen solche 2 Zahlen a und b, die dritte $= d$ und die ausmeßliche Kleinste $= k$, so muß auch k die dritte d niessen. Will man es nichtzugeben, so nehme man ein so groß Multiplum von k ($= ek$) aus d hinweg, so offt man kan, iedoch so vielmahl, daß der Rest $r < $ sey, als k. Weil nun a und b das k messen, so messen sie auch sein Multiplum ek durch e. Nun aber messen a und b auch $ek + r = d$, (ex hyp.) Ergo messen sie auch den Rest r, (so $<$ als k) (§. 289.) Und folglich ist k nicht die ausmeßliche kleinste, welches die oben angesetzte Bedienung zernichtete.

24. Aufgabe.

24. Aufgabe. 337. **Zu 3 und mehr gegebenen Zahlen die ausmeßliche kleinste zu finden.**

1.) Erfinde man die kleinste k, so von den ersten beyden a und b ausgemessen wird, wird nun solche auch von der dritten d ausgemessen, so ist k die kleinste. (§. 335.)

2.) Misset aber d nicht das k, so sey m die kleinste, welche von d und k ausgemessen werde, alsdenn ist auch m die kleinste, so von allen dreyen ausgemessen wird.

3.) Sind ihrer mehr, so suche man zu dem gefundenen letzten Dividuo minimo und der folgenden Zahl einen neuen Minimum, so messen ihn auch alle vorhergehende.

Z. E.

	a	*b*	*d*
Z. E. Man erfinde zu	4,	10,	16 den Minimum Dividuum.
2)	2	5	4
	k	20	*m*80
4)	5		

	a	*b*	*d*
Also suche man auch zu	6,	8	½ und 18 die aus=
meßlich kleinste: 2)	3	4	3
Facit: 72		*k*24	*m*72
6)		4	

Beweiß.

Das *a* und *b*, desgleichen *a*, *b*, *d*, &c. *k* oder *m* und so weiter, messen, erhellet aus dem 294. §. Nun ist noch darzu thun, daß sie keine noch kleinere. Z. E. *x* messen.

Will mans setzen, so muß so wohl *d* als *k* auch das *x* messen, (§. 336.) Und demnach müste die kleinere *x* von der grössern *k* ausgemessen werden, welches zu sagen nicht statt findet.

338. Dahero wenn eine gewisse Zahl von 3 oder mehr vorhergehenden ausgemessen wird, so wird sie auch von der vorhergehenden Dividuo minimo ausgemessen. Zusatz.

25. Aufgabe.

339. Die kleinste ausmeßliche Zahl noch auf eine behendere Manier zu finden. 25. Aufgabe.

1.) Lösche man diejenigen, so einander aufheben, aus, die übrigen, wo es angehet, hebe man

man durch ein gemein Maaß auf, bey welchen es aber nicht angehet, die setze man denen aufgehobenen zur Seite.

2.) Also verfahre man weiter, so offt sichs thun läst, dann kommen endlich lauter primi inter se.

3.) Die gefundenen primos inter se, wie auch die gebrauchten Communes mensuras multiplicire man in einander, so geben sie den Dividuum minimum, vermöge des 294 und 295 §.

Z. E. Man erfinde ihn zu: 6, 8, 9, 12, 16, 36

4) 3 4 9

3) 1 4 3

Demnach ist der Dividuus minimus 4.3.1.4.3 = 12.12 = 144.

Not. Weil 1 nicht multiplicirt, kan mans auch weglassen.

Man erfinde die ausmeßliche kleinste zu den ersten zehen Anfangs-Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

3) 2 7 8 3 10

Fac. 3.2.7.4.3.5 2) 7 4 3 5

6 42 168 504 2520. nehmlich

2520.

Man

Man suche die kleinste Zahl, so man gäntzlich dividiren kan mit:

2, 3, 5, 9, 16. 20. 30

3) 3 16 20 5 10

4) 3 4 5

Facit: (3.4.3.4.5.) = 720.

340. Und eben auf solche Art kan man auch aus denen Zusammen unabgetheilten Quantitäten die Dividuam minimam heraus bekommen: Z. E. aus

$$\begin{array}{c|cccc} a) & a & 2a, & ab-ac, & d \\ \hline & 2 & b-c & d & \end{array}$$

ist sie = (a.2).(b-c) d = 2abd-2acd.

Aus a^2-b^2, $a^2+2ab+b^2$, a^3-ab^2 findet man

$$\begin{array}{c|ccc} a+b) & a-b, & a+b, & a^2-ab \\ \hline a-b) & 1 & a+b & a \end{array}$$

Die ausmeßliche kleinste = $(a+b).(a-b).(a+b).a$

= $a^4-a^3b-a^2b-ab^3$

341. Diejenigen, so die Arithmetic nach ihren wahren Beweiß-Gründen wollen einsehen, können der von 242 S. bißher angeführten Haupte-Wahrheiten mit ihren Demonstrationen gar nicht entrathen, sintemahl darinnen die vornehmsten propositiones Libri VII. Euclidis und noch andere nöthige mehr enthalten, welche aber nur die practischen Problemata der Rechen-Kunst zu ihrem Haupt-Zweck setzen, können die Beweise inzwischen weglassen, und sich bloß an die Aufgaben mit ihren dabey beschriebenen Auflösungen halten, denn auf diese Art werden sie eben so kurtz hindurch kommen, als irgends sonst in einem practischen Compendio. Anmerck.

5. Von

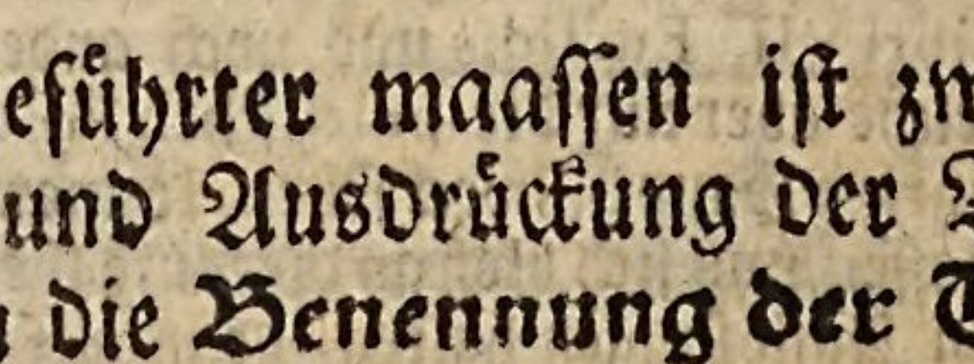
5. Von denen Eigenschafften und Rechnungs-Arten der gebrochenen Zahlen.

Erklär. 342. Die **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** (Numeri fracti, Fractiones, Minuta, Minutiæ, Fragmenta) werden ordentlicher Weise allezeit auf weniger als Eins geschätzet, (§. 8.) Dahero sind sie ein oder etliche Theile von der Unität, das ist, von einem Gantzen. (§. 11. 12.)

Zusatz. 343. Und demnach bestehen sie wie andere Zahlen, ebenfalls aus ihrem **Zehler** und **Nenner**, (§. 16. 17.)

Z. E. So ich eine Elle *a b* in 4 gleiche Theile theile, und 3 davon hinwegnehme, so ist das hinweggenommene Stück, (oder vielmehr die hinweggenommene Theile) *c d*

4 Theil
3 / oder $\frac{3}{4}$



Anmerck. 344. Da nun die Dinge, so man zusammen zehlen will, aus einerley Einheiten bestehen müssen, (§. 7.) und ein Theil von einem Gantzen wiederum alleine, und ohne kleinere Theile zu haben, kan angesehen werden, so müssen auch die Theile eines Bruchs einander gleich, und alle von einerley Unität oder Gantzem seyn, (§. 1. und 2.)

Satz. 345. Eingeführter maassen ist zwar die Schreib-Art und Ausdrückung der Brüche diese, daß man die **Benennung der Theile**, oder den **Nenner** unter ihre **Anzahl**, das ist, unter den **Zehler** setzet, und eine Linie dazwischen

schen ziehet, z. E. zwey Drittheil von einem Ganzen, schreibt man $\frac{2}{3}$, allwo 2 der Zehler und 3 der Nenner ist.

346. Alleine es haben schon längstens einige Mathematici angemercket, darunter vornehmlich Herr Eduart Wels, * daß man um mehrerer Leichtigkeit willen, die Brüche lieber nach der Schreib-Art anderer Zahlen andeuten möchte, deren Benennung wir ordentlicher Weise nur oben drüber zu schreiben pflegen, nehmlich wie man Pf. 4tel setzet 3 ꝛc. Also könnte man auch schreiben 3 oder 3^4. Denn auf diese Art würde die Bezeichnung der Brüche mit dem Ansatz derer übrigen Zahlen desto ehender übereinkommen, und derselben scheinender Unterscheid, so die Lehrlinge im Anfang stutzig macht, leichtlich gehoben werden; Da denn 2^9 und 5^9 wie in gemeiner Rechnung, als 7^9 könnten angesehen, und unten in der Regul de Tri 8 Theil Thlr. 8 Theil? (z. E. 3 Centner kosten 12 was 7) nach schon gewöhnlicher Art berechnet werden. Anmerck.

347. Zu dem so lassen sich auch die Reguln aus denen vorhergehenden Operationen der gantzen benahmten und unbenahmten Zahlen eben so gut hier appliciren, und gelten auch in Brüchen, z. E. daß man nur ihre Zehler addiren oder subtrahiren müsse, und den gemeinen Nenner, (wie in den benahmten) nur oben stehen lasse, desgleichen, daß man so wohl die Zehler als die Nenner in ein ander zu multipliciren und zu dividiren habe ꝛc. Weswegen man den Nenner gar wohl oben setzen könnte, iedoch, (wegen zu vermeidender Confusion mit den Exponenten der in sich multiplicirten Zahlen s. 235.) ihn lieber vor, Viertel als hinter den Zehler schreiben, als statt $\frac{3}{4}$ oder 3, oder 3^4. schriebe man $^4 3$. Anmerck.

* Vid. Ed. Welsii Elementa Arithm. num. & spec. p. 18. 19.

An statt $\frac{a}{b}$ könnte man auch setzen:

^{b}a, vor $5\frac{3}{4}$. $5,^{4}3$. vor $n\frac{c}{r}$. $n,^{r}c$ &c.

Anmerck. 348. Unterdessen, ob schon dieses alles seinen zureichenden Grund hat, so will sichs dennoch, wegen der einmahl, und von allen Nationen angenommenen Schreib-Arten der Brüche nicht so gleich in Ubung bringen lassen. Derowegen werde mich noch der gewöhnlichen Bruchs-Andeutung bedienen, iedoch einigen Liebhabern zu Gefallen auch diese andere, (so sie seithero nicht vor eine kahle Veränderung gehalten,) zu Ende mit beysetzen.

Erklär. 349. Weil die kleinern Zahlen mit grössern dividirt, allezeit einen Bruch geben, so sind die Brüche auch nichts anders, als Quotienten, z. E. 2 mit 5 dividirt, geben im Quot $\frac{2}{5}$ oder $^{5}2$ (§. 141. und 142.)

Lehrsatz. 350. Wie nun in ieder Division der Quotus gegen 1, also auch der Dividendus gegen den Divisorem, (§. 125.) Also verhält sich auch ieder Bruch gegen sein Gantzes (oder gegen 1) wie der Zehler gegen den Nenner.

Zusatz. 351. Dahero sind die ordentlichen Brüche (Fractiones propriæ) allezeit kleiner, als ein Gantzes, die ausserordentlichen aber (impropriæ sive spuriæ) sind entweder just ein Gantzes, oder mehr als ein Gantzes, das ist:

Ist der Zehler { kleiner / just so groß / gröſſer } als der Nenner, so ist der Bruch { weniger / just so viel / mehr } als 1.

z. E. $\frac{7}{9} < 1$. $\frac{5}{5} = 1$. $\frac{5}{4} > 1$. Wenn $a > 1$,

so ist $\frac{b}{a} < 1$ | $\frac{a}{a} = 1$. | $\frac{a}{b} > 1$

Zusatz. 352. Folglich kan man die, so mehr als ein Gantzes sind, auch durch die Division in Gantze resolviren, und stat $\frac{9}{4}$ auch $2\frac{1}{4}$ und vice versa setzen. (s. 143.)

353.

353. Gantze mit Brüchen, heissen sonst auch Fractiones mixtæ, und werden in pure Brüche verwandelt (oder wie es etliche nennen, eingerichtet,) so man die Gantzen mit dem Nenner multipliciret, den Zehler dazu addirt, und den Nenner wieder drunter schreibt. (§. 143.) Erklär. und Anmerck.

Z. E. $2\frac{3}{4}$ geben $\frac{11}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4}$. (§. 351.)

Uberhaupt: $a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$. Denn $\frac{c}{c} = 1$ (§. 351.)

$\frac{ac}{c} = a$ (§. 129.) Und $\frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$, (das ist, so man die Nenner, als andere blosse Nahmen ansiehet.) $= \frac{ac+b}{c}$

354. Die Brüche, deren Zehler gegen ihre Nenner einerley Verhältniß haben, sind alle einander gleich. Lehrsatz.

Z. E. $\frac{2}{4}\ \frac{3}{6}\ \frac{6}{12}\ \frac{50}{100}$ &c. sind alle gleich grosse Stücke von der Unität.

Denn durchgehends sind sie gegen 1 wie der Zehler gegen den Nenner, (§. 350.) Nun ist (hier z. E.) ieder Zehler die Helffte aus seinem Nenner, Ergo ist ieder Bruch auch die Helffte von seinem Gantzen, oder von 1.

Uberhaupt $\frac{a}{b} = \frac{ea}{eb}$ Denn wie a gegen b, so ist auch ea gegen eb. (§. 269.)

Nehmlich den Gehalt, den der Zehler a aus seinem Nenner b hat, den hat auch ea aus eb. Nun haben beyde auseinander gleichen Gehalt, folglich sind sie auch gleich grosse Stücke von ihrem Gantzen. (§. 350.)

355. Dahero hat man unterschiedne Kennzeichen der gleichgültigen Brüche, als Zusatz.

α.) Es muß nicht allein ieder Zehler in seinem Nenner gleich vielmahl enthalten seyn, sondern

β.) Es muß auch des einen Zehler gegen des andern Zehler seyn, wie des einen Nenner gegen des andern Nenner, (§. 272.) und deswegen:

γ.) Der Quot aus beyden Zehlern muß gleich seyn dem Quot aus beyden Nennern, (§. 123.)

δ.) Das Factum eines Nenners in des andern Zehler muß beyderseits einerley seyn. (§. 274.)

Z. E. $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ Denn 18 : 3 = 6 und 42 : 7 = 6

Und 7 mahl 18 = 126 gleichwie 42.3 auch = 126.

Lehrsatz. 256. So man eines eintzelen Bruchs, (der nehmlich 1 zu seinem Zehler hat,) Zehler und Nenner mit eines andern Bruchs Nenner beyderseits multiplicirt, so bekommen sie beyde einerley Benennungen, und sind die multiplicirten gleichgültig mit denen vorigen.

Z. E. $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ bekommen auf diese Art einerley Benennung, $\frac{5}{15}$ und $\frac{3}{15}$, und ist $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ und $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

Uberhaupt: Wenn von zwey Brüchen $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$, $bc = a$ Theilen so ist $\frac{1}{b} = c$ und $\frac{1}{c} = b$ (§. 297.) Oder so man vor a, das Factum beyder Nenner bc substituiret, ist $\frac{1}{b} = \frac{c}{cb}$ und $\frac{1}{c} = \frac{b}{cb}$. Denn beyderseits ist $1cb = bc$ oder cb. (§. 273. und 355. δ.)

Zusatz. 257. Dahero da $\frac{1}{b} = \frac{c}{cb}$ und $\frac{1}{c} = \frac{b}{bc}$ und $n > 1$ multiplicire man jeden durch und durch mit $n = \frac{n}{1}$ so ist $\frac{n}{b} = \frac{nc}{cb}$ und $\frac{n}{c} = \frac{nb}{bc}$. (§. 269. 354.)

Folg-

Folglich bleiben auch die vieltheiligen Brüche, so nehmlich mehr als 1 zu ihren Zehler haben) gleichgültig, und kommen zu einerley Benennung, wenn man eines Zehler und Nenner mit des andern Nenner multiplicirt.

Und daraus kömmt eine der nöthigsten Præparationen in Brüchen, die

26. Aufgabe.

358. **Zwey Brüche von unterschiedener Benennung unter einerley Nenner zu bringen.** 26. Aufgabe.

Hier ereignen sich 2 Fälle:

I. **Wenn die Nenner primi inter se seyn.**

Da multiplicire man iedes Bruchs Zehler und Nenner mit des andern Nenner.

Z. E. $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$ sind $=$ $\frac{24}{40}$ und $\frac{35}{40}$

$\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind gleich $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$. Denn von $\frac{a}{b}$ und $\frac{ad}{bd}$, desgleichen von $\frac{c}{d}$ und $\frac{bc}{bd}$ ist das Factum eines ieden Zehlers in des andern Nenner gleich. (§. 273.) Folglich sind auch die Brüche gleich. (§. 355. δ.)

II. **Wenn die Nenner numeri compositi, und nicht primi inter se seyn, (denn da würden die neuen Nenner nach vorigen, ausser Noth zu groß.)**

Man suche zu beyden Nennern den Dividuum minimum, (§. 335.) so giebt er den gemeinen Nenner.

In solchen gemeinen Nenner dividire man mit ieden besondern Nenner, und multiplicire den Quot mit dem dazu gehörigen Zehler, so kommen die neuen Zehler.

Z. E. $\frac{4}{9}$ und $\frac{7}{36}$ sind gleichgültig mit $\frac{16}{36}$ und $\frac{7}{36}$

$\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{12}$ sind $=$ $\frac{9}{24}$ und $\frac{10}{24}$.

$\frac{5}{42}$ und $\frac{11}{54}$ sind gleich $\frac{45}{378}$ und $\frac{77}{378}$

6)

Indem aber der Quot schon da ist, darff man ihn nur mit des andern Bruchs Zehler multipliciren.

Uberhaupt: So man $\frac{a}{cd}$ und $\frac{b}{ce}$ in die kleinsten gleichbenahmte und gleichgültige Brüche verwandeln will, so hebe man die Nenner mit c auf, und bringe sie auf primos inter se, nehmlich d und e. Mit einem von diesen multiplicire man den andern componirten Nenner, als hier: mit d multiplicire man ce, kömmt der Dividuus minimus dce (§. 335. 2.) Hierein dividire man mit ieden besondern Nenner, und multiplicire den Quot mit dem dazu gehörigen Zehler, kömmt:

$\frac{a}{cd} = \frac{ae}{cde}$ und $\frac{b}{ce} = \frac{bd}{dce}$ (§. 269. und 355.)

Man kan aber die Division ersparen, wenn man so gleich ieden von primis inter se mit des andern Zehler multiplicirt.

Z. E. So $\frac{9}{68}$ und $\frac{5}{32}$ sollen reducirt werden, so

4)

$\frac{17}{8}$

hebe man die Nenner mit 4 auf:

Nun ist $8.9 = 72$

und $5.17 = 85$

Facit:

$\frac{72}{544}$ und $\frac{85}{544}$

Mit dem kleinsten aufgehobenen multiplicire man den grösten Nenner, kömmt der genieine Nenner 544.

27. Aufgabe.

359. Drey, vier und mehr Brüche in gleichgültige von einerley Benennung zu bringen. 27. Aufgabe.

I.) Wenn die Nenner primi inter se seyn.

Man multiplicire die Nenner alle in einander, so kommt ihr kleinster Dividuus (§. 333.) oder der gemeine Nenner.

Hierein dividire man mit ieden besondern Nenner, und multiplicire den Quot mit dem dazu gehörigen Zehler, so geben sich auch die besondern Zehler.

B. E. Man soll $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ und $\frac{7}{9}$ reduciren:

4	5	45	135
5		36	72
20		20	140
9			
180			

Der kleinste Dividuus, oder der gemeine Nenner: 180

Facit: $\frac{135}{180}$ $\frac{72}{180}$ $\frac{140}{180}$.

Überhaupt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ sind gleich $\frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf}$ (§. 269. 354.)

Woraus man zugleich siehet, daß man den Zehler und Nenner iedes Bruchs mit dem Product aus den Nennern der übrigen Brüche nur multipliciren darff, denn also erspahret man wiederum die Division, z. E.

5	3	4	77.	88.	56
8	7	11	385	264	224
			616	616	616

(§. 130. und 273.)

II. Wenn die Nenner nicht alle primi inter se seyn.

Man erfinde zu allen Nennern die kleinste ausmeßliche Zahl, (§. 339.) so giebt sie den gemeinen, oder wie etliche sagen, den Haupt-Nenner. Hierein dividire man mit iedem Nenner, und multiplicire den Quot mit dem zugehörigen Zehler, so kommen die neuen Zehler.

Z. E. Man reducire $\frac{1}{4}\ \frac{3}{3}\ \frac{5}{4}\ \frac{7}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{6}$ in gleiche und gleichbenannte Brüche.

6 8 9 12 16 36

4) 3 4 6

3) 4 3

4·3·4·3 = 144.

24 18 16 12 9 4

24 54 80 84 27 20

144

Oder man kan sie (wegen der Addition,) auch so gleich unter einander setzen. Z. E. Man bringe folgende 9 Brüche unter die kleinste gleiche Benennungen.

$\frac{1}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}\ \frac{8}{9}\ \frac{9}{10}$

(2520 der Haupt-Nenner

				1260	1260
			7	840	1680
			5	504	2016
			35		
			3	420	2100
(3	2	(2	105		
			4	360	1080
			420	315	1575
			2		
	8	4	840	280	280
	3	3	3	252	2268
	10	5	2520		
	14	7		180	540

Be-

Beweiß:

Wenn ein Nenner (n) in den Dividuum minimum (m) dividirt, und der Quot (q) mit dem Zehler (z) multiplicirt wird,

so ist $\frac{z}{n} = \frac{qz}{m}$

Denn wan $m:n = q$ so ist $qn = m$. (§. 129.)

Dahero $\frac{qz}{m} = \frac{qz}{qn}$. Wie nun

z gegen n also auch qz gegen qn. (§. 269.)

Und derowegen $\frac{z}{n} = \frac{qz}{m}$. (§. 354.)

28. Aufgabe.

360. **Einen Bruch zu** abbreviren, **oder aufzuheben, daß er in kleinern Zahlen eben so viel, als vorhero gilt.** 28. Aufgabe.

a.) Man suche vom Zehler und Nenner das gemeine Maaß, und wo es seyn kan, das gemeine gröste Maaß, (§. 309.) Hiermit dividire man den gegebenen Zehler und Nenner, so giebt der erste Quotus den kleinern Zehler, und der andere Quot den kleinern Nenner.

b.) Oder, wenn das gemeine gröste Maaß gefunden, determinire man so gleich die kleinsten Zahlen aus denen Quotienten. (§. 311.)

c.) Z. E. Man verwandle den Bruch: $\frac{153}{207}$ in einen gleichgültigen von kleinern Zahlen.

(9
153 | 17 — Fac. 17 (§. 270. 354.)
207 | 23 23

6.) Man suche den Bruch 133/152 aufzuheben:

1
2 9
1 5 2 (1 (7 Fac. 7/17 = 7/8 (§. 311. 8.)
1 3 3
6

Anmerck. 361. Wie man die Brüche auch zuweilen mit denen einzelen Zahlen nach und nach aufheben könne, und was vor Kenn-Zeichen dazu gehören, soll unten (§. 373. seq.) nach den 4. Haupt-Operationen der Brüche folgen.

Lehrsatz. 362. Die Brüche, so einerley Benennung haben, verhalten sich gegen einander, wie ihre Zehler.

Z. E. 2/5 ist gegen 3/5 wie 2 gegen 3. Denn das Factum der beyden Mittelsten 3.2/5 ist gleich dem Facto der äusserstен 2.3/5.

Und daher ist 2/5 in 3/5 so vielmahl enthalten, als 2 in 3. (§. 271.)

Oder überhaupt: a/b ist gegen c/b wie ab/b gegen cb/b §. 269.

Nun dividire man beyderseits mit b.) wie a/1 gegen c/1.

(§. 270.) das ist: wie a gegen c.

Zusatz. 363. Folglich kan man erfahren, welcher Bruch gröser ist, als der andere, nehmlich der den grösten Zehler bey gleichen Nennern hat, z. E.

So

So man erfahren will, ob $\frac{4}{7}$ oder $\frac{5}{9}$ Ducat. schwehrer wiegt, so bringe man sie zu gleichen Nennern (§. 358.) kommen: $\frac{36}{63}$ und $\frac{35}{63}$ dahero ist $\frac{4}{7}$ Duc. um $\frac{1}{63}$ Duc. schwehrer als $\frac{5}{2}$ Duc. Oder:

364. Weil die Nenner nur die Nahmen sind, so kan Anmerck. man sie weglassen, und nur ieden Zehler mit des andern Nenner multipliciren, als:

$\frac{7}{13}$ und $\frac{11}{21}$ sind wie 147 und 143.

365. Wenn 2 Brüche einerley Zehler haben, so verhält sich der erste gegen den andern, wie des andern Nenner gegen des ersten Nenner. Lehrsatz.

Z. E. $\frac{3}{5}$ ist gegen $\frac{3}{7}$ wie 7 gegen 5. $\frac{a}{b}$ ist gegen $\frac{a}{c}$ wie c gegen b. Denn sie verhalten sich gegen einander wie ac gegen ab. (364.) folglich auch wie c gegen b. (§. 270.)

Die letzten 2 Lehrsätze haben einen treflichen Nutzen in Anmerck. der so genannten Regul de Tri, denn da kan man die Brüche weglassen, und statt ihrer nur die gantzen sich also verhaltenden Zahlen gebrauchen, z. E. statt

$\frac{3}{4}$ Ellen kosten $\frac{2}{3}$ Thlr. was 40 Ellen? kan man setzen:

9 ——— : 8 ——— : 40. und vor

$\frac{3}{8}$ Cent. kosten $\frac{3}{4}$ Thlr. was kommen 42 Centner?

kan man setzen 4 $\frac{3}{4}$: 8 : $\frac{4}{—}$: 42? wovon unten mit mehrern soll gedacht werden.

29. Aufgabe.

29. Aufgabe. 366. **Die gantzen Zahlen in einen Bruch von gegebener Benennung zu verwandeln.**

Man multiplicire die Gantzen mit dem gegebenen Nenner, so kömmt der Zehler.

Unter solchen Zehler schreibe man den gegebenen Nenner, so ist die hieraus entstandene Fractio impropria denen gantzen gleich.

Z. E. **Man mache 5 Gantze zu 6 Theilen.**

Fac. $\frac{30}{6}$.

Man reducire m auf n Theile. Fac. $\frac{mn}{n}$

Denn $m = \frac{m}{1}$. (§. 10.) Wie nun m gegen 1 also mn gegen n (§. 269.) Derowegen ist $\frac{m}{1}$ oder $m = \frac{mn}{n}$ (§. 354.)

Wie verhalten sich 6 Centner gegen $\frac{4}{5}$ Centner?

Fac. Wie $\frac{30}{5}$ gegen $\frac{4}{5}$ das ist, wie 30 gegen 4 (§. 362.)
2) oder wie 15 gegen 2. (§. 270.)

30. Aufgabe.

30. Aufgabe. 367. **Einen Bruch auf einen andern von gegebener Benennung zu reduciren.**

Man multiplicire den verlangten Nenner mit des gegebenen Bruchs Zehler, und dividire das Factum mit seinem Nenner, so kömmt der gesuchte Zehler zu dem neuen Nenner.

Z. E.

Z. E. Man verwandle $\frac{2}{3}$ in einen Bruch, dessen neuer Nenner 24 sey, kommen $\frac{2.24}{3}$ oder $\frac{48}{3} = 16$ vor den Zehler, und also $\frac{16}{24}$.

Überhaupt: Man reducire $\frac{a}{b}$ auf einen andern Bruch, dessen neuer Nenner c sey,

so ist er $= \frac{\frac{ac}{b}}{c}$ oder $\frac{ac:b}{c}$

Denn gesetzt $\frac{a}{b}$ sey $= \frac{x}{c}$ so ist $ac = bx$ (S. 355. 3.)

dieses dividire man beyderseits mit b)

kömmt: $\frac{ac}{b} = x$. (S. 284.)

368. Solches hat seinen Nutzen, wenn man den Valorem Anmerck. eines Bruchs, z. E. $\frac{2}{3}$ Thlr. in Gr. oder 24 Theilen des Thlr. verlangt. Oder wenn man z. E. $\frac{7}{8}$ auf 1000 Theile eines Dings resolviren will, denn da ist

$$\frac{7}{8} = \frac{7000}{8} = \frac{875}{1000} \text{ oder } \underline{875}. \text{ (S. 9.)}$$

$$\frac{\frac{7000}{8}}{1000}$$

Wovon unten in Fractionibus decimalibus ein mehres.

31. Aufgabe.

369. Die Brüche zu addiren. 31. Aufgabe.

1.) Wenn sie nicht schon einerley Benennungen haben, so reducire man sie auf einerley Nen-

Nenner, (nach dem 358. und 359. §.) Addire die Zehler, und setze den gemeinen Nenner darunter.

2.) Ist nun der Summarische Bruch mehr als ein Gantzes, so verwandle man ihn durch die Division des Nenners in Zehler noch in seiner Gantze, so man es vor nöthig befindet, (§. 352.)

Z. E. Man addire $\frac{1}{8} \frac{3}{8} \frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$ Summa: $\frac{16}{8} =$ 2 Gantzen.

Man addire: $\frac{1}{4} \frac{2}{5} \frac{3}{8}$ und $\frac{7}{10}$ Centner.

(40

	1/4	10
	2/5	16
2)	3/8	15
4	7/10	70

Summa: $\frac{111}{40}$ (2 $\frac{31}{40}$ Centn.

Wo Gantze bey Brüchen vorkommen, addire man die Gantzen vor sich. Z. E. An einem Postement ist die Höhe des Fusses $1\frac{1}{2}$ modul, des Würffels $2\frac{3}{4}$, des Deckels $\frac{3}{4}$ wie hoch ist das gantze Postement?

(4
1 1/2 | 2
2 3/4 | 3
3/4 | 3
8/4 | 2
+3

Summa: 5 Modul.

Überhaupt: so $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ zu addiren, reducire man man sie (nach dem 359. §.) auf $\frac{dfa}{dfb}$ und $\frac{bfc}{bfd}$ und $\frac{bde}{bdf}$, so sind sie $\frac{dfa+bfc+bde}{bdf}$.

Beweiß.

Da in der Addition nur der sämmtliche Gehalt der Zehler erfunden wird (§. 85.) und die Zahlen, so man zusammen nehmen will, von einerley Benennungen seyn müssen, (§. 86. 2.) auch die reducirten Brüche als partes, denen erstern, als partibus gleich, (§. 359.) so sind auch die Tota oder Summen einander gleich. (§. 243.)

32. Aufgabe.

370. **Einen Bruch von den andern zu Subtrahiren, oder die Differentz zweyer Brüche zu erfahren.** 32. Aufgabe.

a.) Die-

α.) Diejenigen von unterschiedener Benennung mache man zu gleichbenamten, (§. 358) Subtrahire die Zehler von einander, und schreibe den gemeinen Nenner darunter.

Z. E. Eine gewisse Sache ist nach dem Gewicht behandelt, hat sollen $\frac{3}{4}$ Centner wägen, ist aber nur $\frac{5}{8}$ Cent. schwehr gerathen, wie viel ist vom Gelde abzuziehen?

(8
3/4 | 6
5/8 | 5/8

Da es nun $\frac{6}{8}$ werden sollen, und $\frac{1}{8}$ fehlt, so ist der 6te Theil des Geldes abzuziehen.

Difference.

A, B, C. haben zusammen $\frac{5}{6}$ Hufe Landes, davon hat A $\frac{1}{3}$ und B $\frac{3}{8}$ wie viel hat C?

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{8+9}{24} = \frac{17}{24} \quad (\S.\ 369.)$$

Facit: $\frac{1}{8}$.

(24
5 | 20
6 | 17
17/24 | —

(3
Rest. 3/24 = | 1/8 (§. 360.)

β.) Wo Gantze bey Brüchen sind, so subtrahire man sie besonders, und so der obere Bruch (nehmlich des numeri ex quo) kleiner, als der untere, muß man von obern Gantzen eine Unität borgen, und solche auf den allgemeinen Nenner reduciren.

Z. E.

Z. E. Auf eine gute Geld-Sorte ist Lagio pro Cento $3\frac{1}{3}$, auf eine geringere ist es nur $2\frac{1}{4}$. Um wie viel differirt es?

(12

1	4
3	
1	3
4	

kömmt: $1\frac{1}{12}$ vor die gesuchte Differenee.

Von $8\frac{2}{5}$ Acker werden durchs Wasser weggerissen

$2\frac{7}{8}$ Acker, wie viel behält noch der Possesor?

	$\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$ und $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ diese von einem
Rest. $5\frac{21}{40}$ Acker.	Gantzen oder $\frac{40}{40}$ Rest $\frac{5}{40}$ hierzu $\frac{16}{40}$ thun $\frac{21}{40}$

Uberhaupt: Wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ grösser als $\frac{c}{d}$ und dieser von jenem subtrahirt wird, so restiret: $\frac{ad-bc}{bd}$

Beweiß:

Denn $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ (S. 355.) Folglich $\frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd}$ das ist, weil die Nenner nur die Nahmen sind, (S. 16. und 92.)

$\frac{ad-bc}{bd} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ (S. 254.)

33. Aufgabe.

33. Aufgabe.

371. **Einen Bruch durch den andern zu** multipliciren, **oder zu** determiniren, **wie viel ein Bruch von einem andern Bruch ist.**

a.) **Man multiplicire beyde Zehler in einander, so kommt der neue Zehler, desgleichen beyde Nenner in einander so komt der neue Nenner des producirten Bruchs.**

Z. E. Man multiplicire $\frac{3}{4}$ **mit** $\frac{2}{3}$ **Facit:** $\frac{6}{12}$ **oder** $\frac{1}{2}$ (S. 360.)

Das ist $\frac{3}{4}$ **weniger, als einmahl, nehmlich nur** $\frac{2}{3}$ **mahl genommen, ist** $\frac{1}{2}$.

Als $\frac{3}{4}$ **Thl. oder 18 Gr.** $\frac{2}{3}$ **mahl genommen, sind 6 Gr. † 6 Gr.** $=$ **12 Gr.** $=$ $\frac{1}{2}$ **Thl.**

Uberhaupt: $\frac{a}{b}$ **multiplicirt mit** $\frac{c}{d}$ **thut:** $\frac{ac}{bd}$

Beweiß:

bd ist gegen bc wie ad gegen ac.

Denn das Factum der mittelsten $bc.ad$ ist gleich dem Facto derer äussersten $bd.ac$. (§. 273. und 271.)

Also bleiben sie in eben der Verhältniß, wenn man sie allerseits mit bd dividirt, derowegen ist

$\frac{bd}{bd}$ gegen $\frac{bc}{bd}$ wie $\frac{ad}{bd}$ gegen $\frac{ac}{bd}$ (§. 270.)

$\frac{bd}{bd}$ aber ist $=$ 1 (§. 351.) $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$ $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ (§. 355. 3.)

Substituiret man nun, gleiches vor gleiches, so ist

$$1 \text{ gegen } \frac{c}{d} \text{ wie } \frac{a}{b} \text{ gegen } \frac{ac}{bd}$$

Nehmlich wie sichs in der Multiplication gebühret, es ist die Unität gegen den Multiplicanten, wie der Multiplicandus gegen das Product. (§. 97.)

Z. E. Von einem grossen Forst erbt Titius $\frac{4}{9}$, hiervon kauft Cajus $\frac{3}{5}$, wie viel besitzt dieser vom gantzen Forst?

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{45} \left| \begin{matrix}(3 \\ \frac{4}{15}\end{matrix}\right. \quad \text{Facit: } \frac{4}{15}.$$

Von 1340 Thl. soll einer $\frac{2}{5}$ zahlen, er zahlet aber hiervon nur $\frac{3}{4}$, wie viel ist dieses von der gantzen Summa?

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} \; \frac{3}{10} \; \frac{1}{10}$$

$\frac{1}{10}$ von der Summe ist $=$ 134

$\frac{3}{10}$ davon sind $=$ 402 Thl. (§. 263.)

b.) Wo bißweilen Gantze mit Brüchen zu multipliciren vorkommen, da richte man sie vorhero ein, (§. 353.) und verfahre alsdenn wie vorhin. Anmerck.

Weiln $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ und $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$ und

$\frac{23}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{161}{12} = 13\frac{5}{12}$ (§. 352.) so ist auch

$5\frac{3}{4}$ multiplicirt mit $2\frac{1}{3} = 13\frac{5}{12}$ (§. 263.)

Anmerck. c.) Indem alle gantze Zahlen aus zusammen genommenen Unitäten bestehen, (§. 10.) so kan man unter iede gantze Zahl eine 1 als Nenner setzen, und damit ebenfalls wie oben procediren

Z. E. Man multiplicire 8 mit $\frac{5}{6}$, so geben $\frac{8}{1} \cdot \frac{5}{6}$ im product $\frac{40}{6}$. Oder weil die Nenner nur die Nahmen der Dinge sind, darff man nur den Zehler mit der gantzen Zahl multipliciren, und die Benennung schlechthin behalten.

Anmerck. d.) Und daher giebt ieder Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, so viel dergleichen Gantze, als der Zehler Unitäten hat.

Z. E. $\frac{3}{4}$ mit 4 multiplicirt, giebt 3 Gantze.

Denn $\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{12}{4} = 3$.

Uberhaupt, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{b} = a$. (§. 130.)

34. Aufgabe.

34. Aufgabe. 372. Einen Bruch mit einem andern Bruch zu dividiren, oder zu sagen, wie offt ein Bruch in einem andern enthalten sey.

α) Man

α.) Man multiplicire den Nenner des Divisoris in den Zehler des Dividendi, und den Zehler des Divisoris in den Nenner des Dividendi, so giebt das erste Factum den Zehler, und das andere den Nenner des Quoti.

Z. E. Man dividire mit $\frac{2}{3}$) in $\frac{7}{8}$, so kömmt der Quotus $\frac{21}{16}$.

Uberhaupt mit $\frac{a}{b}$ dividire man in $\frac{c}{d}$ Facit $\frac{bc}{ad}$.

Beweiß.

In ieder Division muß 1 gegen den Quotienten sich verhalten, wie der Divisor gegen den Dividendum. (§. 125.) Dahero ist hier darzuthun, daß

$$1 \text{ gegen } \frac{bc}{ad} \text{ wie } \frac{a}{b} \text{ gegen } \frac{c}{d}.$$

Man substituire vor 1 den ihm gleichen Bruch $\frac{bc}{bc}$ (§. 351.)

vor $\frac{a}{b}$ setze man $\frac{ad}{bd}$ und vor $\frac{c}{d}$ setze man $\frac{bc}{bd}$ (§. 354. und 355.)

kömmt: $\frac{bc}{bc}$ gegen $\frac{bc}{ad}$ wie $\frac{ad}{bd}$ gegen $\frac{bc}{bd}$. Nun seyn die ersten beyde gegen einander, wie $a\,d$ gegen $b\,c$. (§. 365.) Und die andern auch wie $a\,d$ gegen $b\,c$. (§. 362.) Folglich ist

$$1 \text{ gegen } \frac{bc}{ad} \text{ wie } \frac{a}{b} \text{ gegen } \frac{c}{d}.$$

Oder: Wenn man es kürtzer will haben, das Factum der mittelsten,

$$\frac{(b\,a}{adb} = \frac{c}{d} \quad (\text{§. } 360.)$$

ist gleich dem Facto der äussersten $\frac{1c}{d}$, und deswegen ist 1 gegen diesen Quot, wie der Divisor gegen diesen Dividendum. (§. 271.)

Anmerck. β.) So man den Divisorem umkehret, kan man die Brüche nach vorhergehender Aufgabe nur beyde in einander multipliciren, so kömmt eben der Quotus, der aus der Multiplication durchs Creutz kömmt,

Als wenn vorhin $\frac{a}{b}$ divid. in $\frac{c}{d}$ giebt $\frac{bd}{ad}$, so giebt

$\frac{b}{a}$ multipl. in $\frac{c}{d}$ ebenfalls $\frac{bc}{ad}$.

Anmerck. γ.) Wenn gantze und vermischte Brüche, oder diese und pure Brüche in einander sollen dividirt werden, so setze man unter die Gantzen eine Unität, (§. 371. c.) und richte die vermischten ein, (§. 353.) Dann verfahre man nach obiger Regul.

Z. E. Ein Müntz-Meister soll aus einer Marck Gold, (oder 16 Loth) kleine Müntzen schlagen, iede à $\frac{2}{9}$ Loth. Wie viel Stücke kan er daraus schlagen? Fac. 72.

$\frac{2}{9}$ div. $\frac{16}{1}$ geben $\frac{144}{2} = 72$

Ein rechtwincklicht-vierecketer Teich ist $20\frac{1}{2}$ Ruthen lang, und nach seinem flachen Innhalt hält er $278\frac{4}{5}$ Quadrat-Ruthen, wie breit ist er? Fac. $13\frac{3}{5}$ Ruthen.

$\frac{41}{2}$ divid. in $\frac{1394}{5}$

2
133
2788
——
geben 205

(41
123 | 3
13 —— | ——
205 | 5

Der wie vielste Theil ist $\frac{2}{3}$ Gr. aus einem Thlr?

$\frac{2}{3}) \frac{24}{1} = \frac{72}{2} = 36.$

Demnach sind $\frac{2}{3}$ Gr. oder 8 Pf. der 36ste Theil des Thlr.

Anmerck. d.) Wenn ein Bruch mit einer gantzen Zahl soll dividirt werden, und der Zehler ist damit divisibel, so dividire man nur den Zehler, und setze den vorigen Nenner darunter, z. E. $\frac{21}{24}$ dividirt in $\frac{7}{24}$ bringt $\frac{7}{24}$. (§. 129.)

Anmerck. e.) Ist aber der Zehler und Nenner des Divisoris ein zulänglicher Theil vom Zehler und Nenner des Dividendi, so dividire man sogleich ieden Zehler und Nenner in den andern, dann geben die Quoti den Zehler und Nenner zum Bruchs-Quotienten, als $\frac{9}{20}$ stecken in $\frac{3}{4}$ just $\frac{3}{4}$ mahl. Uberhaupt: $\frac{a}{b}$ $\frac{ac}{bd}$ stecket in $\frac{c}{d}$ just $\frac{a}{b}$ mahl. Nehmlich $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$

$\frac{ad}{bd}$ (§. 355.) Und so man die Nenner als blosse Nahmen betrachtet, ist $\frac{ac}{bd} : \frac{ad}{bd} = \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d}$ (§. 270. und 354.)

6. Von den Criteriis oder Kenn-Zeichen der Zahlen, wenn sie mit einzeln aufzuheben.

Lehrsatz. 373. Wenn man eine oder mehr Decades, Centenarios, Millenarios &c. mit 9 dividiret, so bleibt allezeit die Anzahl solcher Zehener, Hunderte, Tausende ꝛc. übrig.

Z. E. so man { 40 mit 9 dividirt, bleibt 4
700 bleibt der 7 übrig. ꝛc.
8000 Zehler 8

Uberhaupt, wenn $10 = d$ $100 = d^2$ $1000 = d^3$ (§. 30.) Ihre Anzahl $= a$, so ist $9 = d-1$, und so viel Decades, Cent. Mill. &c. als man will $= ad$, oder ad^2 ꝛc.

Nun dividire man $(a$ ad $(a$ mit $d-1$ $\|$ desgleichen $(a$ ad ad^2 $(ad+a$ ꝛc. $d-1$ $d-1$

Zusatz. 374. Folglich bleibt, wenn ich 340 mit 9 dividire, $3+4$ oder 7 übrig. Wenn ich 341 mit 9 dividire, bleibt $3+4+1$ oder 8 übrig. So ich 342 mit 9 dividire bleibt $3+4+2$ oder 9 übrig, und weil in diesem Rest noch einmahl 9 steckt, bleibet nichts übrig, also bleibet aus 14127 nur 6 übrig.

375.

375. Und daher sind alle Zahlen mit 9 aufzuhe- Zusatz und
ben, deren Zehler-Summe (oder wie man es auch Regul zu
sonsten heist, Collect.) in 9 aufgehet. 9.

Z. E. Weil das Collect von 117. von 5274, von 13157181 nehmlich 9. 18 und 27 mit 9 aufgehet, so sind auch solche Zahlen divisibel mit 9.

376. Die Centenarii pares (oder grade Hunderte) Lehrsatz.
mit 8 dividirt, lassen nichts übrig, die impares aber (oder ungrade Hunderte) lassen allezeit 4 übrig.

Es sey die Anzahl, (oder der Zehler) der Hunderte $= a$,

$$\begin{matrix} (4a \\ +2ad \\ 111 \end{matrix}$$

so sind sie $= \underset{11}{ad^2}(ad+2a$

und ist $8 = d-2$) oder der Divisor.

Nehmlich wenn ad^2 mit $d-2$ dividirt wird,
bleiben $4a$ übrig.

Ist nun $a = 2n$ (§. 248.) so sind $4a = 8n$,
welche in 8 aufgehen.

Ist $a = 2n+1$ (§. 249.) so sind $4a = 8n+4$,
da denn 4 übrig bleibt.

377. In welcher Zahl demnach die Hunderte grad Zusatz und
seyn, und die zwey letzten Ziffern mit 8 aufgehen, Regul zu
oder wo die Hunderte ungrad seyn, und die zwey 8.
letzten Ziffern + 4 in 8 aufgehen, da ist auch die ganze Zahl mit 8 divisibel. (§. 292.)

Z. E. 75632 gehet an, denn die 6 Hunderte sind grad,
und in 32 gehet 8 auf.

Desgleichen 5736 geben auch, denn die ungraden Hunderte geben 4 zu 36 thun 40, welche mit 8 aufgehen.

Daß in übrigen die letzte Ziffer solcher aufzuhebenden Zahl muß grad seyn, ist ohne dem aus dem 277. §. bekannt.

Zusatz. 378. Ja man siehet auch hieraus, daß alle Millenarii, Myriades &c. mit 8 dividirt, aufgehen. Denn sie sind alle Centenarii pares. (§. 248.) und deswegen lassen sie nichts übrig. (§. 376.)

Anmerck. 379. Woraus denn auch die alte Regul zu demonstriren, daß iede Zahl mit 8 divisibel, deren 3. letzte Ziffern in 8 aufgehen. Denn eben diejenigen, so vor den 3 letzten Ziffern stehen, sind Millenarii. (§. 36.)

Anmerck. 380 So leicht, als sichs mit vorhergehenden, und auch mit folgenden Divisoribus lässet ansehen, so schwehr ist es hingegen mit der bösen sieben also gleich zu erkennen, ob eine Zahl damit aufzuheben sey oder nicht, und haben den Septenarium die Pythagorici deswegen Virginitatis numerum genennet, * quia primus sit, qui neque generatur, neque generat, (sc. intra Denarium,) wie ihn denn auch Morhoff μυσικώτατον heißt, ** welcher in der Anwachsung seiner Multiplorum keine so kenntliche Ordnung, wie andere hält, *** deswegen dann von ihm in Arithmetischen Büchern, so viel ich weiß, bißhero noch keine sonderliche Regul zu geben gewest. Denn ob zwar einige sagen, daß alle Zahlen mit 7 divisibel seyn, welche sich in 3, 6, oder 9 &c. doppelt-anwachsende kleinere Zahlen resolviren lassen, z. E.

1		2		4		8		16											
2	7	4	14	8	28	16	56	32	112	&c.									
4		8		16		32		64											

3		6				5		10											
6	21	12	42	&c.		10	35	20	70	&c.	&c.								
12		24				20		40											

so will doch dieses nicht viel helffen, denn wenn ich eine aufzuhebende Zahl als 4361 in 3 dergleichen doppelt-anwachsende kleinere zergliedern will, und vor dieselben x, $2x$ und $4x$ setze, so muß ich eben mit 7 dividiren, wenn ich den Valorem von x erfahren will, und bin also nichts gebessert.

* Macrob. Somn. Scip. Lib. II. c. 6. & Lib. I. c. 6.
** Morhof. Polyhist. L. I. c. 12. p. 119.
*** Vid. Theol. Chr. in Numeris pag. 17. und 40.

Gleichers

Gleichergestalt, wenn aus der gegebenen Summe, Anzahl, und Verhältniß der Terminorum der erste soll determiniret werden, läufft die Division (mit $2^3 - 1$) eben wiederum auf 7 hinaus, und ist damit noch nichts gewonnen. Will man das Symbolum Septenarii auf $\frac{d}{2} + 2$ setzen, so stellet zwar $\frac{n}{2} + 2n$, (nehmlich doppelt so viel Unitäten, als Fünffer) alle Multipla auf einmahl vor, und sollte man anfangs meynen, die Analysis eines Numeri $= n$ würde gar leicht fallen. Allein so bald man die Zergliederung anstellet, und vor die Anzahl der Unitäten $2x$ und der Fünffer x setzet, so ist

$n = x\,5 + 2x$ oder welches einerley $= 5x + 2x = 7x$

Und stehet also die böse Zahl wiederum in circulo vitioso.

381. Wenn man mit 7 in eine Anzahl der Decadum (ob schon nicht allemahl völlig hinaus) dividiret, so bleibet iederzeit 3 mahl so viel übrig, als ihr Zehler. Lehrsatz.

Z. E. so man 10 mit 7 dividirt, bleiben 3
20 6
30 9, und hieraus wieder 7. bleiben 2 übrig.
&c:

Überhaupt: Wenn eine beliebige Anzahl Decades $= ad$ mit $7 = d - 3$ dividirt werden:

$$a\,d\,(\,a$$
$$d-3)$$

bleiben . . . . $3a$ übrig.

382. Folglich bleiben aus 60 alsdenn 18, und hieraus 3 übrig, 8 aber und $3 = 11$ und hieraus bleibt 4 übrig. Die Zahl 84 läst 24 und diese 6 übrig, 6 aber $+4+4 = 14$, und hieraus bleibt nichts übrig. Dahero läst auch 84 nichts übrig. Zusatz.

So man dieses weiter continuiret, müssen endlich die Reste aus einer grossen Zahl so beschaffen seyn, daß man 7 just etliche oder mehr mahl aus ihnen hinweg werffen kan,

kan, wenn die grosse Zahl mit 7 divisibel ist, z. E. wenn die Reste 6 † 2 † 5 † 1 † 3 † 4 so kan man 7 dreymahl darinnen ausstreichen, und deswegen ist die Zahl, daraus solche Reste nach und nach gekommen, mit 7 aufzuheben.

Regul zu 7. 383. Auf diese Art darff man nur aus einer grossen Zahl allemahl die letzte Ziffer abschneiden, und die übrigen tripliren, lässet sich nun aus denen abgeschnittenen 7 just etliche oder mehr mahl wegwerffen, so ist die gröste Zahl mit 7 divisibel.

Z. E. Man will untersuchen ob so schneide man die Reste mit einer schieffen Linie ab, und tripire die übrigen:

2472 / 4 in 7 aufgehet,
741 / 6
222 / 3
66 / 6
19 / 8
5 / 2
1 / 8
/ 3

Aus denen abgeschnittenen werffe man 7 weg, so offt es angehet, bleibt nichts übrig, so ist die grosse Zahl mit 7. divisibel.

Hier konte man 7 sechsmahl ausstreichen, also ist 24724 mit 7 aufzuheben.

Anmerck. 384. Ob zwar dieses durch ein leichtes multipliciren und bloss ses ausstreichen geschiehet, so hätte es doch gerne noch kürtzer haben mögen, weswegen ich auch solches denen Liebhabern der Zahlen zu weiterer Untersuchung überlasse.

Lehrsatz. 785. Wenn man eine Zahl mit 9 dividirt, und der Rest 0, 3 oder 6 ist, so läst sie sich auch mit 3 aufheben.

Denn weil die 3 den Novenarium misset, so misset sie auch im Dividendo sein Multiplum, (§. 294.) misset sie nun auch den Rest, so misset sie auch den gantzen Dividendum. (§. 292.)

Zusatz. 386. Da nun die Abjectio Novenarii aus einer Zahl anzeigt, wie viel nach der Division mit 9 übrig bleibt, (§. 374.)

(§. 374.) so kan man nur in einem Numero complexo nach Wegwerffung der 9en den Rest betrachten, denn wenn gar keiner, oder doch 3 oder 6 bleibt, so ist die gegebene Zahl mit 3 divisibel. Regul zu 3.

Z. E. Aus 4527 bleibt 0. Aus 111 desgleichen 714 bleibt 3, aus 4875 bleibt 6. Demnach sind alle diese Zahlen mit 3 aufzuheben.

387. Wenn eine Zahl grade und mit 3 divisibel, so ist sie auch mit 6 divisibel. Lehrsatz, und Regul zu 6.

Denn 6 ist der Dividuus minimus von 3 und 2. welchen numerum aber zwey Zahlen ausmessen, den misset auch ihr Dividuus minimus aus. (§. 336. und 248.)

Z. E. 714 ist grade, und wird von 3 ausgemessen, (§. 786.) demnach wird sie auch von 6 ausgemessen.

Also ist auch 11538 aufzuheben

mit 6) 1923.

Folglich kan keine ungrade Zahl mit 6 ausgemessen werden. (§. 277.)

388. Und hieraus siehet man, warum die Collecte der Multiplorum von 9. 6 und 3 immerzu wieder 9, 6 oder 3 ausmachen müssen, i. E. Anmerck.

Die Multipla novenarii (iedes mit seinen Ziffern) addirt und in infinitum continuirt, machen allzeit 9.

9 = 9	90 = 9	171 = 9
18 = 9	99 = 9	180 = 9
27 = 9	108 = 9	189 = 9
36 = 9	117 = 9	198 = 9
45 = 9	126 = 9	207 = 9
54 = 9	135 = 9	216 = 9
63 = 9	144 = 9	225 = 9
72 = 9	153 = 9	234 = 9
81 = 9	162 = 9	243 = 9

und so fort unendlich hinaus.

Die

Die Multipla Senarii in infinitum continuirt, machen mit ihren Collect immer zu 6, 3, 9, 6, 3, 9 ꝛc.

6 = 6	60 = 6	114 = 6
12 = 3	66 = 3	120 = 3
18 = 9	72 = 9	126 = 9
24 = 6	78 = 6	132 = 6
30 = 3	84 = 3	138 = 3
36 = 9	90 = 9	144 = 9
42 = 6	96 = 6	150 = 6
48 = 3	102 = 3	156 = 3
54 = 9	108 = 9	162 = 9

und so fort un; endlich hin. aus.

Die Multipla Ternarii in infinitum continuirt, machen mit ihren Collect allezeit: 3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, 6, 9 ꝛc.

3 = 3	30 = 3	57 = 3
6 = 6	33 = 6	60 = 6
9 = 9	36 = 9	63 = 9
12 = 3	39 = 3	66 = 3
15 = 6	42 = 6	69 = 6
18 = 9	45 = 9	72 = 9
21 = 3	48 = 3	75 = 3
24 = 6	51 = 6	78 = 6
27 = 9	54 = 9	81 = 9

und so fort un; endlich hin. aus.

Lehrsatz. 389. Alle Multipla von 5 gehen entweder in 5 oder 0 aus. Denn 5 muß entweder eine grade oder ungrade Zahl multipliciren, wenn ein Multiplum soll heraus kommen. Derowegen sind nur 2 Fälle:

Entweder: $\frac{d}{2}$ (oder 5) multipliciret $2n$, und da kömmt

$$\frac{2nd}{2} = nd$$

Nehm-

Nehmlich eine gewisse Anzahl der Decadum, so wegen ihres Rangs allezeit mit einer Null geschrieben wird. (§. 24.)

Oder: $\frac{d}{2}$ multipliciret $2n+1$, und da kömmt

$$\frac{2nd}{2} + \frac{d}{2} \equiv nd + \frac{d}{2}$$

Nehmlich wieder eine gewisse Anzahl der Decadum, statt deren Null, die 5 Unitäten hinten angesetzet werden, und also immer in 5 ausgehen.

390. Wenn demnach eine Zahl in 0 oder 5 ausgehet, so kan sie auch mit 5 aufgehoben werden. Zusatz und Regul zu 5.

Z. E. $5)\overline{3170}$ $\quad$ $5)\overline{9365}$

$\quad\quad 634 \quad\quad 1873$

391. An statt mit 5 zu dividiren, kan man in Decadibus, Centenariis, Millenariis, Myriadibus &c. nur die Zehler dupliren, und das Duplum um eine Stelle erniedrigen. Anmerck.

Z. E. $5)\overline{30}$ $\quad$ $\overline{2300}$ mit 5 div. geben

6 nehmlich 6 ist doppelt 3, aber nur in loco Unitatum. $\quad$ 460 $\quad$ 46 nicht Hunderte, sondern nur Zehner.

$4132000:5$

bringen 826400. Nehmlich nur Hunderte.

Uberhaupt: Wenn der Dividendus $\equiv nd^m$ und der Divisor $\equiv \frac{d}{2}$, so ist der Quotus $\equiv \frac{2nd^m}{d} \equiv 2nd^{m-1}$

(§. 372. 7.) und 240. 2. 3.)

392. Alle Centenarii so wohl mit graden als ungraden Zehlern, so viel man will, lassen sich iederzeit mit 4 gäntzlich aufheben. Lehrsatz.

Denn

Denn man nehme so viel Centenarios, als man verlanget, und nenne sie in genere ad^2.

$$ad^2 \,(\, 2ad + 4a + a$$

Diese dividire man $4 = (\frac{d}{2} - 1)$ $\quad 2ad$

Rest $+ 4a$ oder $(\frac{d}{2} - 1)\,a$

geht alles auf.

Zusatz und Regul zu 4.

393. Dahero darff man nur die letzten 2 Ziffern bey einer Zahl ansehen, sind solche mit 4 divisibel, so ist auch die gantze Zahl damit gäntzlich aufzuheben. (§. 292.)

Z. E. 1700 91352 71508

4) 425 4) 22838 4) 17877

Aus dem 277. §. weiß man auch schon, daß dergleichen aufzuhebende Zahlen müssen grade seyn.

Lehrsatz.

394. Alle Zahlen so in 0, 2, 4, 6, oder 8 ausgehen, sind grade Zahlen.

Denn 10 und alle ihre Multipla sind grade Zahlen (§. 248. und 277.) addiret man nun noch eine von vorhergehenden graden, als 2, 4, 6, oder 8 dazu, so wird auch wieder die gantze Zahl grade. (§. 250.)

Zusatz und Regul zu 2.

395. Dahero lassen sich alle Zahlen, so in Nulle, 2, 4, 6, oder 8 ausgehen, mit 2 gäntzlich aufheben. (§. 248.)

Zusatz überhaupt.

396. Und demnach lassen sich aufheben mit

9,] Grade und ungrade Zahlen, aus deren Collect sich 9 just hinwegwerffen läst.

8,] Nur

8,] Nur grade Zahlen, derer Hunderte grad seyn, und die 2 letzten Ziffern, oder deren Hunderte ungrad seyn, und die 2 letzten Ziffern + 4, in 8 aufgehen.

7,] Grad und ungrade, aus deren abgeschnittenen Unitäten, nach alsofort triplirten Zehnern, sich 7 just hinwegwerffen läst.

6,] Alle grade Zahlen, deren Collect nach Wegwerffung der 9 entweder 0, 3, oder 6 übrig läst. (oder die mit 3 divisibel.)

5,] Alle grade so in 0, und alle ungrade, so in 5 ausgehen.

4,] Alle grade Zahlen, deren 2 letzte Ziffern in 4 aufgehen.

3,] Alle grade und ungrade, wo nach der Abjection des novenarii nichts, 3, oder 6 bleibt, (oder deren Collect mit 3 divisibel.)

2,] Alle grade Zahlen, so nehmlich in 0. 2. 4. 6. oder 8 ausgehen.

397. Nun solte ich zwar auch von denen Kenn-Zeichen derer- Anmerck.
jenigen Zahlen handeln, die man mit gar nichts aufheben kan, nehmlich so Prim-Zahlen sind, alleine man kan ihnen aus vorhergehenden noch nicht genugsam beykommen, derowegen muß ich solches nach der Doctrin von Potentzen verspahren.

398. Endlich folgen nach versprochener maasen einige Exempel der Brüche, wo der Nenner oben angedeutet ist. Anmerck.

1.) In der Addition.

Vier Dinge sind schwehr

Cent: (40

A	2„ 41	10
B	4„ 83	15
C	6„ 52	16
D	3„ 101	4

So ist die gantze Last: 15„ 40 45 oder 16„ 81.

Wenn $d = 10$, was macht $d-1 + {}^2d + d-2 + {}^5d +$ $({}^2d+1)$ das ist: $9+5+8+2+6$? Summa: 30.

(10

$d-1$	
${}^2d$	$5d$
$d-2$	$2d$
${}^5d$	$5d$
${}^2d+1$	

Summa: $2d-2+({}^{10}12d) = {}^56d = 18+12 = 30$.

2.) In der Subtraction:

Man subtrahire von ^{32} die zwey Brüche ^{61} und ^{73}.

(42

^{32}	28
^{61}	7
^{73}	18

25

Rest: ${}^{42}3$ oder ${}^{14}1$.

Von

Von $^{4}3$ Centnern ist abgegangen $^{6}1$ Centner. Aus dem Rest wird ein Cylinder gegossen, und hiervon der dritte Theil abgeschnitten, wie schwehr ist noch das grösere Stück solches Cylinders?

$$\begin{array}{r|l} (12 & \\ \hline {}^{4}3 & 9 \\ {}^{6}1 & 2 \end{array}$$

Rest: $^{12}7 . {}^{3}2$ thut $^{36}14 = {}^{18}7$ Centn.

Von $x-2(3x^2-2x+1)$ subtrahire man $x+3\ (2x^2+x-3)$

$$\begin{array}{r} 3x^3+7x^2-5x+3 \\ 2x^3-3x^2-5x+6 \end{array}$$

Restiret: $x^2+x-6(x^3+10x^2-3)$

3.) In der Multiplication.

Eine Rauten-Vierung oder Rhombus ist nach seiner grösten Diagonal oder über Eck lang: $12\frac{3}{8}$ Ellen und über Eck breit $8\frac{2}{3}$ Ellen. Wie groß ist dessen flacher Inhalt? Facit: 53 und $\frac{5}{8}$ Quadrat-Ellen.

$$\begin{array}{r} 12,,{}^{8}3 = {}^{8}99 \\ 4,,{}^{3}1 = {}^{3}13 \\ \hline 297 \\ 99 \\ \hline 24)\ 1287\ (53,,{}^{8}5. \\ 245 \\ 1 \end{array}$$

Man multiplicire $a+b\ (2a^2-3ab+b^2)$
mit: $a-b\ (5a+2b)$

$+4a^2b-6ab^2+2b^3$
$10a^3-15a^2b+5ab^2$

Facit: $a^2-b^2\ (10a^3-11a^2b-ab^2+2b^3)$

4.) In der Division.

Ein groß Gefäß ist mit Wasser gefüllet, wäget netto 909 Pf. wie viel hält solches nach seiner Solidität Cubic-Schuch, und zwar Leipziger? Facit: 15.

Not. Dergleichen Cubic-Schuch aus der Pleiße wog vor etlichen Jahren, als man hier experimentirte: $60\frac{3}{5}$ Pf. welches auch mit Leupoldi Observ. in Theatr. Hydrost. p. 202. ziemlich accordiret.

909
$60,53 = 5303$

4545 (15. Cubic-Schuch.
x x

Mit $2y\ (3n)$ dividire man in $4by\ (3ax.)$

Facit: $12bny\ (6axy) = 2bn\ (ax.)$

399. Damit ich nichts schuldig bleibe, folget auch die oben §. 312 erwehnte kürtzere Manier, das gemeine grösste Maaß zuweilen sehr behende heraus zu bringen.

35. Aufgabe.

400. **Ein Vortheil, das gemeine gröſte Maaß zweyer Zahlen kürtzer, als ſonſt gewöhnlich, zu finden.** 35. Aufgabe.

Wenn man ſiehet, daß nach geſchehener Diviſion der Reſt mehr, als die Helffte des Diviſoris beträgt, ſo nehme man den Quot um eine Unität gröſſer, ſubtrahire von dem neuen Facto Diviſoris und Quoti, (oder dem nunmehr geſetzten gröſſern Multiplo,) den Dividendum, und mit der Differenz, (um welche nehmlich der Dividendus weniger, als das gröſſere Multiplum iſt,) dividire man wieder in den Diviſorem, und ſo mehr, als die Helffte ſolcher Differenz reſtiret, nehme man wieder den Quot um 1 gröſſer, und verfahre wie vorhero ꝛc. ſo nun die erſte Differenz und der erſte Diviſor mit einer dritten ausgemeſſen werden, ſo miſſet ſolche dritte auch den erſten Dividendum, und werden hierdurch einige Diviſiones verſpahret. *

Z. E. Man ſoll das gemeine gröſte Maaß von 4359 und 1131 finden, ſo ſetze man die Diviſiones der Bequemlichkeit wegen alſo:

	-3	-24	-165				
3)	24)	165)	1131)	4359	4	7	7	8
		168	1155	4548.24				

* Dieſes Compendii bedienet ſich Wallisius im Treatiſe of Algebra p. 76.

Ohne dergleichen Abkürtzung würde man nach der gewöhnlichen Art und der 17. Aufgabe weit mehrere Divisiones nöthig gehabt haben, als:

3 21 24 141 165 966
3)21)24)141)165)966)1131)4359 | 3 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 7
21 120 141 825 966 3.3.93

Nehmlich der letzte Divisor (3) giebt beyderseits das gemeine gröste Maaß, (§. 309.) Daß aber auch nach vorhergehender abbrevirten Theilung die grössere Zahl von der letzt gefundenen dritten ausgemessen werde, ist leicht zu erweisen.

Denn so die grössere $= g$, die kleinere $= k$ und die Difference $= d$, so ist das grösser genommene Multiplum $ek - d = g$, folglich $ek = g + d$. Wird nun k von der letzt gefundenen dritten (nehmlich der gemeinen grösten mensur (§. 309.) ausgemessen, so wird auch sein Multiplum ek oder $g + d$ damit ausgemessen, (§. 294.) Die dritte aber misset auch d (ex hyp.) Ergo misset sie auch g. (§. 289.)

6. Von einigen Compendiis und bequehmen Abkürtzungen der 4. Rechnungs-Arten.

I. In der Addition.

Anmerck. 401. Man findet zwar bißweilen Autores, die so wohl in der Addition, als Subtraction auch einigen Vortheil gesucht, als durch die Rabdologiam Neperianam, * durch den Proportional-Zirckel ** durch Machinas Arithmeti-

* Mich. Scheffelt in der Beschreibung der Neperianischen Rechen-Stäblein. Ulm 1714.
** Nic. Goldmann de Usu Proportionatorii p. 8. 9.

cas,

cas, * ꝛc. Es können aber damit dergleichen Operationes meist nur in kleinen und wenigen Zahlen vorgenommen werden, und ehe man die Stäblen gelegt, die Zahlen mit dem Zirckel abgefasset und fortgesetzet, und die Machine gestellet, mittler weile hat man sie ordentlicher weise lange addirt oder subtrahirt, dahero dieser vermeinte leichtere Weg in der Praxi nicht viel sagen will. Unterdessen wird sich in der Addition derer gleichviel- oder gleichmäßig zu- und abnehmenden Zahlen mehr als ein Vortheil zeigen, wenn man nun bald im II. Theil von Numeris figuratis und denen Verhältnüssen handeln wird.

II. In der Subtraction.

402. Wenn man von einer grössern Zahl nicht eine, sondern etliche kleinere nach und nach will wegnehmen, so alteriren die Borg-Puncte, die gewöhnlicher Weise oben bemercket werden, den Numerum ex quo dergestalt, daß solche Verringerung zu einigen kleinern Ziffern des folgenden Subtrahendi gar nicht nöthig ist, und deswegen eine Verwirrung macht. Anmerck.

* Leibnitius in Descriptione Machinæ Arithmeticæ in Misc. Berol. p. 319. infine. Additio concipi potest ut Multiplicatio per unitatem, Subtractio ut Divisio, cujus quotiens est Unitas. Ita quatuor, quas vocant Species habemus, quibus omnia alia peraguntur. Quanquam Additio & Subtractio etiam sine Multiplicationis & Divisionis imitatione perfacile in Machina per se efficiantur, & ita quidem ut parte mobili opus non sit.

Derohalben hat man noch eine Manier zu subtrahiren, so man Methodum per æqualem augmentationem nennet, da man die Puncte, (wegen des vorfallenden Borgens) nicht oben, sondern unten anbringet; Nehmlich es wird dadurch nicht allein die untere um 1, (das ist um eine Decadem der vorhergehenden,) sondern es wird auch die vorhergehende obere um eine Decadem vergrössert, und alsdenn kan man die grössern Ziffern des Subtrahendi gar gemächlich von denen kleinern des Numeri ex quo hinweg nehmen, ohne sie auf den Gebrauch einer weitern Subtraction vorhero zu verstimmeln, wie aus folgendem Exempel zu sehen:

I. Vortheil.

Ein Anschlag von einem Guthe beläufft sich auf

	30426	a Thl.
Der erste bietet	2.4.61.8	b
so sind sie von einander:	5808	a-b
Der andere licitiret:	2620.9	c
so differiren die Geld-Summen:	42.17	a-c

} Subtr.

Und beyde Licitanten: 1591 Thl. = c-b

Denn daß die Differentia Differentiarum eben so groß sey, als der Subtrahendorum ist leicht zu sehen, indem (a-b)-(a-c) = c-b.

Anmerck. und II. Vortheil.

403. Auch hat dieser Modus in dem simplen Abziehen einen Vorzug, denn nach der gemeinen Art gelten die obern Nullen bald Zehen, bald Neune, und muß es wohl in acht genommen

men seyn, daß man sich dabey nicht confundiret, hier aber gelten die obern Nullen allezeit 10. Desgleichen darff man in benahmten Zahlen nicht erst eine grössere Speciem oben borgen, und sie in die kleinere zergliedern, sondern wo nichts stehet, da concipirt man so gleich so viel kleinere Species, als zu einer folgenden Unitate progressionali gehören, z. E.

Von	1510010
gehen ab:	3.7.8.4.6.5
Rest:	1131545

	Thl.	Gr.	Pf.
Cassa	8000	—	—
zahlt	5372:	18:	9
bleibt:	2627:	5:	3

Beweiß.

Indem die æqualia in der Subtraction einander aufheben, so ist die Differentz zwischen $a + d$ und $b + d$ eben diejenige, die zwischen a und b ist, z. E. 5 + 10 von 8 + 10 lässet eben so gut 3 übrig, als 5 von 8. Da man nun alle Theile von einer Unitate progressionali zu einer Ziffer des numeri ex quo rechnet, und eben solche Unitatem progressionalem zur folgenden Ziffer des Subtrahendi setzet, so wird der numerus ex quo eben um so viel grösser, als der Subtrahendus, und daher lassen sie (beyderseits um Zehen vermehrt) eben so viel übrig, als wenn man nichts dazu gethan hätte. Uberhaupt: es sey das Residuum von a aus $b = r$, so ist $a + r = b$. (§. 255.) so man nun von $a + r + d$ subtrahiret $a + d$, restiret eben wie zuvor r.

Anmerck. 404. Wer sich an diese Manier zu subtrahiren gewöhnt, der muß in der Division entweder die folgende Ziffer vom Facto partiali Divisoris und Quoti in Gedancken um 1 vergrössern wo man zuvorhero borgen muß, oder er muß solch gantzes Factum ausschreiben, und alsdenn erst aus dem Dividuo hinwegnehmen.

III. In der Multiplication.

Lehrsatz. 405. Wenn man die Differentzen zweyer efficienten, so zwischen ihnen und der nechstfolgenden Decade, Centuria, Chiliade, Myriade &c. sind, in einander multiplicirt, so giebt ihr Factum, sammt dem Zehn-Hundert-Tausend-Zehentausendfachen ꝛc. Rest aus solcher einen Differenz von dem andern efficienten, eben so viel, als wenn man die zwey gegebenen efficienten schlechterdings in einander multiplicirt hätte.

Z. E. So man von den 2 efficienteu 8 und 7 beyder Differenz zwischen ihnen und einer Decade, nehmlich 2 und 3 in einander multipliciret, und zum Facto 6 bekommt, ferner die kleinere Differenz (2) vom kleinern efficiente (7) subtrahiret, und den Rest (5) hier 10 fach nimmt, so ist das vorige Factum 6 und (hier der 10 fache Rest) 50 gleich dem Facto beyder effieienten, nehmlich 7 mahl 8 oder 56.

Beweiß.

Es sey der gegebene grössere efficiens $= a$
und der kleinere $= b$
so ist die kleinere Differenz von der nachfolgenden Decade, Centuria, Chiliade &c. $= d^n - a$
und die grössere Differenz, $= d^n - b$

Nun

Nun multiplicire man beyde Differentzen, nehmlich:

$$\begin{array}{r} d^n - a \\ d^n - b \\ \hline -b\,d^n + a\,b \\ d^{2n} - a\,d^n \\ \hline d^{2n} - a\,d^n - b\,d^n + a\,b \end{array}$$

mit

kömmt: $d^{2n} - a\,d^n - b\,d^n + a\,b$

Ferner subtrahire man vom kleinern efficienten b die kleinere Differenz $d^n - a$, so restirt $b - d^n + a$ (§. 226. solchen Rest multiplicire man mit d^n

$$\begin{array}{r} b - d^n + a \\ d^n \\ \hline b\,d^n - d^{2n} + a\,d^n \end{array}$$

kömmt: $b\,d^n - d^{2n} + a\,d^n$

Hierzu addire man das Factum Differentiarum: $d^{2n} - a\,d^n - b\,d^n + a\,b$

So heben die Signa contraria einander auf, und kommt nicht mehr in Summa, als $a\,b$.

406. Hierinnen stecket derjenigen ihre Regul, denen das **Einmahl Eins**, sonderlich in grössern Zahlen schwehr ins Gedächtniß will, z. E. wenn sie wissen wollen, wie viel 8 mahl 9 macht, so müssen sie dieser Zahlen Differentien von 10, (nehmlich 2 und 1) mit einander multipliciren, thut 2) die kleinere Differenz (1) von der kleinern Zahl (8) Subtrahiren, und den Rest (7) zehnfach (70) zum ersten Differenz-Facto addiren, so kömmt das Facit. (72) Anmerk.

407. Zu mehrerer Bequehmlichkeit kan auch diese Operation mit denen Fingern verrichtet werden. Nehmlich es kan in ieder Hand der eingebogene kleine Finger 6, der eingebogene Gold-Finger mit dem vorigen klei- Zusatz.

kleinen Finger 7. Der Mittel-Finger mit dem vorigen zweyen 8, und der Spitz-Finger mit dem vorigen dreyen 9 gelten, so hat man z.E. das Factum von 7 mahl 8 gantz leichtlich, wenn man in einer Hand 7 und in der andern 8 anleget, so giebt das Factum der stehenden Finger, nehmlich 3 und 2 sechse, und die Summe derer eingebogenen oder liegenden die Zehner, nehmlich 5 oder 50, das ist zusammen 56.

Zusatz, und I. Vortheil.

408. Daß aber eben voriger Lehrsatz im Multipliciren von mehrern Nutzen sey, zeiget Monier de Claire-Combe. * Nehmlich wenn beyde Factores nahe an einen numerum simplicem kommen, als Tausend, Zehntausend, Hunderttausend ꝛc. so setze man die Factores untereinander, und den nechsten Numerum simplicem oben grade drüber. Hernach subtrahiret man beyde Factores von numero simplici, schreibt die Differentzen darneben an die Seite, und multipliciret sie in einander. Endlich subtrahirt man die kleinere Differenz vom kleinern Factore, setzet den Rest an voriges Factum, giebt ihm aber denjenigen Rang, welchen der oben geschriebene Numerus simplex prætendiret.

Als man multiplicire die Zahl 996 mit 987.

1000

	9	9	6 | 4
	9	8	7 | 13

Facit: 983052.

* Dans le Negoce rendu facile p. 161.

Die-

Desgleichen determinire man das Factum von 9992 und 9984. Facit 99760128.

Die Operation ordnet es also: 1 0 0 0 0

	9	9	8	4 | 16
	9	9	9	2 | 8

99760128

409. Diese Manier hat man gleicher weise in Paris noch mehr abbreviret. * Wenn man nehmlich an den kleinsten Factorem so viel Nullen setzet, als er Ziffern hat, den grössern Factorem drüber schreibet, und seine Differenz von demjenigen Numero simplici, der so viel als er Nullen hat, (hier von 1000) darneben schreibt. Mit dieser Differentz multipliciret man den kleinern Factorem von forne her, und subtrahiret das Product, so giebt der Rest das begehrte Haupt-Factum. Anmerck. und 11. Vortheil.

Als man sage, wie viel ist 867 mahl 989?

a =		989	11
b =	867	000	
	9	537	

Facit: 857463

* Der Inventor davon ist Mr. Tarragon Prof. des Mathem. gewesen, wovon im Journ. des Scavans 1689 p. 727.

Be-

Beweiß.

Es seyn die Factores a und b, und der nechste Numerus simplex $= d^n$, so ist

$d^n - a$ = der Differ.
multipl. b
$b d^n - a b$ dieses
von $b d^n$ subtrahirt:
Restiret: $a b$.

III. Vortheil bey dem Gebrauch des Tarifs in §. 185.

410. Wie man die gebräuchlichsten Numeros Materiales vermittelst eines bekannten Tarifs so gleich in kleinere resolviren könne, ist oben §. 185 allbereit gemeldet worden, inzwischen dienen dazu noch folgende Exempla Multiplicationis compendiosæ:

Man resolvire 2413 Gr. in Pf.
Fac. 28956 Pf.

Nehmlich 3 Gr. sind 36 Pf. bleiben 3. Ferner 1 Gr. ist 12 Pf. hierzu 3 sind 15, bleibt 1. Dann 4 sind 48 Pf. hierzu 1 sind 49 Pf. bleiben 4. Endlich 2 Gr. sind 24 Pf. hierzu 4, thun 28, also zusammen 28956. Pf.

Auf gleiche Weise verwandelt man
3524 Thl. in Gr.
Fac. 84576

Man

Man sage: 4 Thl. sind 96 Gr. bleiben 9. Weiter 2 Thl. sind 48 Gr, 9 darzu sind 57 bleiben 5. Ferner 5 Thl. sind 120 Gr, 5 darzu thun 125, restiren 12. Endlich 3 Thl. sind 72 Gr, 12 dazu sind 84. Und also kan man auch in andern Abtheilungen verfahren.

Der Beweiß hiervon gründet sich auf den 263 §. Denn so 2 Thl. = 48 Gr. so sind 10 mahl 2 Rthr. = 10 mahl 48 Gr. und so 5 Thl. = 120 Gr, so sind 100 mahl 5 Thl. = 100 mahl 120 Gr. ꝛc. Derowegen müssen die verwandelten kleinern Sorten allezeit in diejenige Stelle kommen, welche die grössere inne haben, und eben diese wird erhalten, wenn man alles nach der Ordnung unter einander schreibt.

411. Offters ist einer von efficienten ein Numerus compositus, und da erspahret man die Additionem Factorum partialium, wenn man einen efficienten in seine 2 oder 3 Factores zerstreuet, und mit solchen Factoribus nach und nach multipliciret, z. E. Statt 24, multipliciret man erst mit 3, und was heraus kömmt, hernach mit 8, (oder erst mit 4 hernach mit 6.) statt 288 multipliciret man mit 6 mahl 6 mahl 8, und so weiter, als: IV. Vortheil.

3524 Thl. zu Gr.

10572 | 3 8

Fac. 84576

6213

6213	Thl. zu Pf.
37278	6
223668	6
	8

Fac. 1789344 Pf.

Der Beweiß dazu ist in dem Lehrsatz des 275 §. allbereit mit ausgeführet.

V. Vortheil.

412. Auch kan hierdurch bißweilen eine einzele Multiplication erspahret werden, indem man 2 Ziffern des Multiplicatoris in eine contrahiret, als an statt 364 kan man mit 4, und was heraus kommt, mit 9 multipliciren, statt 856 kan man erst mit 8, und hernach das Factum mit 7 multipliciren, iedoch müssen dabey die Loca wohl in acht genommen werden, nehmlich man muß hier das erste Factum, wegen der 800, in den dritten, und das andere, wegen der 56 Unitäten, in ersten Locum bringen, z. E.

42613 (364
170452
1534068 (9
15511132

5274 (856
42192
295344 (7
4514544

413.

Erklähr. und Eintheilung des Zerstreuens.

413. Das gewöhnlichste Compendium in der Multiplication ist das so genannte Zerstreuen, oder Zerfällen, und gehet solche Disperſion nicht allein auf die partes aliquotas, sondern auch aliquantas, oder wie man sonst spricht, man zerstreuet entweder in Factores, oder in Partes. Jenes gehet durch die Multiplication, und dieses durch die Addition, z. E. 12 zerfället man entweder auf die Factores 3 und 4, desgleichen 2 und 6, oder auf die Partes 4 und 8, oder 6 und 6.

Anmerck.

414. Von der ersten Art ist im vorigen 411 und 412 §. schon gehandelt, und kan man auch im Vorfall meine Anatomiam Numerorum gebrauchen, als worinnen ieder Zahl ihre Factores gegen überstehen, wenn man nehmlich nicht so gleich siehet, mit welchen kleinern Zahlen sich ein vorgegebener efficiente läſſet aufheben.

Erklär. und Anmerckung.

415. Die Partes aber heiſſen vortheilhafftig zerstreuet, wenn sie in einem gewiſſen Wachsthum oder Abnehmen fort gehen, als doppelt, drey-vier-fünfffach ꝛc. oder um die Helffte, ein Drittel, ein Viertel ꝛc. auseinander abnehmen, so man sonsten auch Discerptionem rationalem nennet. * Wobey es aber nicht nöthig ist, daß die Theile in solcher Ordnung immediate also auf einander folgen, sondern es kan auch per saltum geschehen, wenn nur ihre Grösse gegen einander in leichten Zahlen,

* Vid. Mart. Knorrii ehmahligen Prof. Math. Wittenb. Disput. de Praxi Italica Def. VIII.

(und zwar in solchen, darein sich vornehmlich der Numerus materialis schicklich theilen läst,) kan angegeben und ausgesprochen werden.

Als man multiplicire 7254 mit 276

43524	6	6
217620	5	30
1740960	8	240
Facit. 2002104		

Nehmlich man zerstreuet 276 in 240 + 30 + 6. Nun ist 30 aus 240 der achte Theil, und 6 ist aus 30 der 5te Theil. Derowegen nehme man den Multiplicandum erst 6 fach, das sextuplum wieder 5 fach, und dieses quintuplum wieder 8 fach, so giebt die Summe aller stückweiß heraus gebrachten Factorum das Factum totale. (§. 276.)

Oder man kan auch bey solcherley Zerstreuung zuletzt die Unität ein oder zweymahl mit zu Hülffe nehmen, als:

7254	mit	276	
36270		1	
145080	5	5	
1813500	4	20	
Fac. 2002104	5.	250	

VI. Vortheil.

416. Und ob zwar solche Art zu multiplicirren in Numeris vulgaribus wenig hilfft, so ist sie doch in benahmten Zahlen, da allerhand kleinere

nere Sorten mit vorkommen, desto fürtreflicher, z. E.

Man multiplicire

Thl.	Gr.	Pf.		
34:	15:	7	mit	324
138	14	4	4	4
692	23	8	5	20
3464	22	4	5	100
6929	20	8	2	200
Fac. 11226	9	—		

Hier nimmt man den Multiplicandum erst 4fach, das heraus gebrachte Quadruplum 5fach, das gekommene Quintuplum noch einmahl 5fach, und endlich das letzte Quintuplum noch zweyfach, so giebt die Summe solcher Multiplorum das begehrte Haupt-Factum.

Denn $4 + (4 \cdot 5) + (4 \cdot 5 \cdot 5) + (4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2) = 324$.

417. Indem das Decuplum und Undecu- Anmerk.
plum auch nicht schwehr fället, kan man hierauf gleicher gestalt bißweilen eine Zahl zerfällen, und wird öffters hierdurch eine Multiplication menagiret, als vorige

34 Thl. 15 Gr. 7 Pf. mit 324, kan man auch also vertheilen.

138	14	4	4	4
1385	23	4	10	40
9701	19	4	7	280
Fac. 11226:	9	—		

VII. Vortheil.

418. Woraus man nochmahls siehet, daß der oben angezeigte Tarif §. 185. in geschwinder Resolvirung der kleinen Sorten auf die grössere nicht wenig hilfft, wie er denn in der Zerstreuung auf Factores ebenfalls das seine mit beyträgt, z. E. weiln $324 = 4 \cdot 9 \cdot 9$. so geben

34 Thl. 15 Gr. 7 Pf. mit $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

	138	14	4
wie	1247	9	—
zuvor	11226:	9:	—

VIII. Vortheil.

419. Es bedienet sich auch Monier de Claire-Combe noch einer Multiplication, so er composée à la Moderne nennet, * (wir wollen sie die Decadische Zerstreuung, oder Disperſionem Localem heissen,) in welcher er den Multiplicatorem weder in Partes aliquotas, noch viel-fach anwachsende aliquantas zerfället, sondern schlechterdings mit denen Unitäten, Decadibus, und Centenariis in die species multiplicandi hindurch multiplicirt, iedoch die Loca genau in acht nimmt, das Factum der kleinern Sorte nach einem gewöhnlichen Tarif so gleich auf die grössern resolviret, die ersten Reste darunter, und die übrigen in ein klein Memoire darneben schreibt. Diese letzten reduciret er nach ihrem Range auf die grössern Sorten, und füllet end-

* Claire-Combe in angeführtem Buche pag. 105. Cap. IX.

lich

lich die leeren Plätze der grössern Sorten mit den reducirten Zehnern und Einheiten aus. Endlich resolviret er die allerletzten Reste noch auf die kleinern Sorten, wie aus folgendem Exempel, und dessen Beschreibung mit mehren zu ersehen ist als

	Thl.	Gr.	Pf.		
1 Cent. à	34	15	7	wie komen	Memoire.
	138	14	4	(324?	7. 2.
	692	23	8		22.. 9..
	10394	19	—		11 6
Fac.	11226	9	—		

Erstlich multipliciret man mit 4, (nehmlich Unitäten,) in 7 Pf. thun 28, oder 4 Pf. und 2 Gr. welche letzte 2 Gr. man im Sinne behält. Ferner multiplicirt man mit 4 in 15 Gr. thun mit vorigen 2 ietzo 62 Gr. oder 14 Gr. 2 Thl. welche 2 Thl. man wieder in Gedancken behält: Endlich eben mit solcher 4 in die 34 Thl. thun 16†2 oder 18, bleibt 1, und 12†1, nehmlich 13, oder 138 Thl. Zum andern multiplicret er mit 2 (nehmlich Decadibus) in die 7 Pf. thun 14, oder 2 Pf. und 1 Gr. welchen letzten man behält, und die 2, (als Decades) ins Memoire schreibt. Dann multiplicirt er auch mit voriger 2 in die 15 Gr. machen 30, und der behaltene dazu, thun 31 Gr. oder 7 Gr. und 1 Thl. welchen man wieder behält, und die 7, (als Decades) darneben ins Memoire setzt; End-

lich multiplicirt er mit 2 in 34 Thl. und der 1 Thl. dazu, thun 69, die man, weiln sie Decades, unter die vorigen 13 Decades der Thl. setzet.

Um nun die übrigen 2 Thl. 23 Gr. und 8 Pf. zu bekommen, resolviret er die 2, oder 20 Pf. aus dem Memoire in 8 Pf. und 1 Gr. schreibt die 8 Pf. unter die 4 Pf. und den 1 Gr. rechnet er zu den 7, oder 70 im Memoire, kommen 71 Gr. oder 23 Gr. und 2 Thl. die er dann auch vollends unter die Thl. und Gr. trägt, welches also absolvirt wäre, wenn man nur mit 24 hätte multipliciren sollen.

Da aber noch eine 3 (nehmlich Hunderte) im Multiplicatore, multipliciret er auch damit in die 7 Pf. kommen 21 Pf. oder 9 Pf. und 1 Gr. welchen letzten man behält, und die 9 Pf. (als Hunderte) ins Memoire trägt.

Ferner multiplicirt man mit 3 in die 15 Gr. thun 45 † 1 oder 46 Gr. nehmlich 22 Gr. und 1 Thl. welchen 1 Thl. man behält, und die 22 Gr. (als Hunderte) darneben ins Memoire setzet. Dann multiplicirt man auch mit dieser 3 in die Thl. kommen 3 mahl 4 † 1, oder 13 Thl. (nehmlich Hunderte) davon man 3 unter die Hunderte, nehmlich unter 6 setzet, und 1 behält, und hierauf sagt man noch, 3 mahl 3 † 1 macht 10, so man, wie gewöhnlich, darneben schreibet.

Um

Um nun endlich den leeren Platz noch mit denen dazu gehörigen 94 Thl. 19 Gr. auszufüllen, resolviret man aus dem Memoire die 9, als 90 Pf. in 6 Pf. und 7 Gr. setzt die 6 wieder drunter, und thut die 7 zu denen 22, werden 227 Gr. oder 11 Gr. und 9 Thl. wovon man die 11 Gr. wieder darunter ins Memoire, und die 9 Thl. unter das dritte Product, als Decades schreibt.

Zuletzt sagt man 60 Pf. in Gr. thun 5 Gr. bleibt kein Pf. Diese 5 zu 11, thun 115 Gr. welche die übrigen 4 Thl. 19 Gr. ausmachen, die man noch ins dritte Product trägt, und schließlich alles addiret.

420. Diese Art stützet sich leedighlich auf den Valorem der Stellen, und den geläufftigen Gebrauch des vorhingedachten Tarifs, will zwar anfangs ein wenig Mühe und Aufmercksamkeit haben, nachdem man ihr aber gewohnet, thut sie so gute, (und wie ich bey etlichen Freunden in der That gesehen,) eben so geschwinde Dienste, als irgends eine von denen gewöhnlichen Zerstreuungen, deswegen ich auch solche mit Fleiß hiermit einrücken wollen. Anmerck.

421. Nachdem man aber hier zu Lande insgemein die kleinern Species lieber in die Theile der grössern resolviret, so können hierzu folgende Täflein so lange gebraucht werden, biß man sich durch die Ubung dergleichen Disperſion selbsten nach seinem Gefallen machen lernet. Anmerck.

422. Nehmlich man zerstreuet entweder in Partes Totius, oder auch zugleich in Partes Partium, z. E. 18 Gr. zerfället man entweder bloß auf Zweyerley Arten der bey uns üblichen Zerstreuung.

auf lauter Theile des Thalers, als in $\frac{3}{4}$, desgleichen in $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ Thl. Oder man saget: 12 Gr. ist $\frac{1}{2}$ Thl. und 6 Gr. ist wieder die Helffte von einem halben Thl. u. s. w. Bestehet nun der Multiplicator aus wenig Ziffern, so gehen beyde Modi gar bequemlich, bestehet er aber aus vielen, so ist die letzte Art commoder, indem sich bey solcher die Anzahl der kleinern Specierum nicht so sehr häuffet, und folglich leichter zu addiren ist.

IX. Vortheil. 1. In Partes Totius.

423. I. Zerstreuung in die Theile des Ganzen. a.) Pfennige auf die Theile des Groschen resolviret:

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$	1

b.)

b.) Groschen auf die Theile des Thl. zerfället;

1	2	3	4	5	6	7	8
1/24	1/12	1/8	1/6	1/6	1/4	1/6	1/3

und hieraus

				1/4		1/8	

9	10	11	12	13	14	15	16
1/8	1/4	1/3	1/2	1/8	1/3	1/2	1/3
:				:			.
1/6	1/8			1/6	1/4	1/8	

17	18	19	20	21	22	23	24
1/3	1/4	1/3	1/2	1/4	1/3	1/2	1
	:	.		:	.		
1/8		1/8	1/3	1/8	1/4	1/3	
:						1/8	

Nor: Die Anzahl der Puncte unter einem Theil bedeutet, daß er so vielmahl müsse repetirt, oder noch darunter gesetzt werden.

Gebrauch voriger Tabellen.

424. Der Gebrauch hiervon ist sehr leicht, denn man darff nur mit den Nennern solcher Brüche in den Multiplicatorem dividiren, und wenn ein oder etliche Puncte darunter stehen, den Quot noch so vielmahl, iedoch allezeit unter seines gleichen schreiben, so giebt hernach die gantze Summe das Facit. Z. E. Man multiplicire

3 Thl. 19 Gr. 7 Pf. mit 42

3) 4)

8. 3

126

14

14

5:6

10:6

14 --

Fac. 160: 6 6 (s. 263. und 352.)

Ausgenommen bey 5 Gr. dividirt man zwar auch mit 6 in den Multiplicatorem, aber mit 4 in den heraus gekommenen Quotum. Ist der Nenner 12 oder 24, so abbreviret man die Division, wenn erst mit 3, und der Quotus wieder mit 4 oder 8 getheilet wird, wovon der Beweiß in dem 295 und 296 s. gegeben.

Noch ein Exempel.

425. Also kan obige Multiplication §. 416. 417. 418. 419. auch nach dieser Zerfällung berechnet werden:

Thl. Gr. Pf.

34 15 7 mit 324

(34

2 4 1296

8 3 972

162

40:12

81

(8 108

Fac. 11226: 9 (s. 352.)

Die-

Dieſes Exempel habe mit Fleiß behalten, damit man den Unterſcheid der Praxis beſſer einſehen, und in folgender Zerfällung auf Theile der Theile, die mehrere Bequehmlichkeit ehender wahrnehmen möge.

426. II. Zerſtreuung, da die kleinen Sorten nicht allein auf die Theile der gröſſern, ſondern auch auf die Theile der Theile zerfället werden. X. Vortheil. II. Zugleich in Partes Partium.

a.) Pfennige auf Groſchen Theile und ihre eigene Theile reſolviret:

1	2	3	4	5	6
1/12	1/6	1/4	1/3	4 | 1	1/2
				3 | 1	2
				1/4	
				4	

7	8	9	10	11	12
6 | 1/2	6 | 1/2	6 | 1/2	6 | 1/2	[6 | 1/2	I.
1 | 1/6	2 | 1/3	3 | 1/2	3 | 1/2	3 | 1/2	
			1 | 1/3	2 | 1/3]	

b.) Groſchen auf des Thls. Theile, und ihre eigene zerſtreuet:

1	2	3	4	5	6
1/24	1/12	1/8	1/6	4 | 1/6	1/4
				1 | 1/4	

7		8	9		10		11		12
6	1/4	1/3	6	1/4	8	1/3	8	1/3	1/2
1	1/6		3	1/2	2	1/4	2	1/4	
							1	1/2	

13		14		15		16		17		18	
8	1/3	12	1/2	12	1/2	12	1/2	12	1/2	12	1/2
4	1/2	2	1/6	3	1/4	4	1/3	4	1/3	6	1/2
1	1/4							1	1/4		

19		20		21		22		23		24	
12	1/2	12	1/2	12	1/2	12	1/2*	12	1/2		
6	1/2	6	1/2	6	1/2	6	1/2	8	1/3		1
1	1/6	2	1/3	3	1/2	4	1/3*	3	1/4		

Gebrauch voriger Tabellen.

427. Bey der Application dieser Tabelle muß man den Unterscheid der Theile viel genauer als in der obigen §. 423 observiren. Denn nur die obersten Theile oder Bruchs-Nenner beziehen sich alle auf das nechste Gantze, und mit denenselben dividiret man so gleich in den Multiplicatorem, so giebt der Quotus die Anzahl solcherley Gantzen. Die untern Theile aber, oder Bruchs-Nenner beziehen sich entweder auf den nechstvorhergehenden Theil, oder auch auf den andern, dritten vorhergehenden, der mit beygesetzten Connexions-Zeichen (]) oder einem Sterngen (*) bemercket, und demnach dividirt man mit dem untern Bruchs-Nennern entweder in den nechsten Quot, oder in denjenigen Quot, welcher aus des connectirten Theils Division heraus gekommen.

Wo-

Wobey noch zu mercken, daß man die erste Partie Pfennige, so immediatè nach denen Gr. kommen, gerne noch auf den letzten Theil der Gr. zerstreuet, als im folgenden Exempel sagt man: 6 Pf. sind aus 3 Gr. der 6te Theil, und daher dividirt man mit 6 in denjenigen Quot, der vor die 3 Gr. heraus gekommen.

Als nunmehro werden sich

Thl.	Gr.	Pf.			
34	15	7	mit	324	
					(34
weit be-	12	2		1296	
quehmer	3	4		972	
multiplici-	6	6		162	
ren lassen,	1	6		40 :	12
als §. 425.				6	18
				1	3
Fac.				11226 :	9

Desgleichen wird man ietzt die Aufgabe im 199 §. No. 2 weit kürtzer solviren:

α.) Durch die Zerstreuung in Partes Partium:

Thl.	Gr.	Pf.		
253	15	11	mit	748
	12	6		2244
	3	3		3740
		2		1496
				374
				93 : 12
				15 : 14
				7 : 19
				5 : 4 : 8
Fac.				189740 : 1 : 8

β.)

β.) Durch die Zerfällung in Partes aliquantas:

253:	15:	11		
1014	15	8		4
6087	22	-	6	24
30439	14	-	5	120
152197	22	-	5	600
189740:	1:	8		

γ.) Durch die Disperſion in Factores, nach meiner Anatomia Numerorum ſub Numero 748.

253:	15:	11	
1014	15	8	(4 11 17
11161	4	4	
189740:	1:	8	

δ.) Durch die Local-Zerſtreuung §. 419.

253:	15:	11		Mem.
2029	7	4	(748	15. 8
10146	12	8		15. 5
177564	5	8		10 2
Fac: 189740	1:	8		

Und auf dergleichen Art kan man auch mit andern Müntz-Maaß- und Gewichts-Sorten verfahren.

Erklär. 428. Eine Hülff-Zahl (Numerus ſuppoſitus) iſt diejenige, deren Gehalt zwar in der Aufgabe nicht verlanget, aber doch darum geſetzet wird,

wird, weiln ein Theil davon den Gehalt einer kleinern Zahl bequehmlich kan anzeigen.

Z. E. Wenn man 3 Pf. auf den Centner oder 110. Pf. zerstreuen will, so nimmt man die Hülff-Zahl 10 Pf. und rechnet so gleich was sie, (als $\frac{1}{11}$ Centner) betragen, hieraus nimmt man das 5tel, und daraus wieder die Helffte, so giebt die Summe der beyden letzten Quotienten das verlangte Factum, als

Werckstück	Cent.	Pf.	dergl. Werckst.
1	wäget 4	3	was wägen 124

124 (4
496
XX : 3ß
2 : 28
1 : 14

Fac. 499 Cent. 42 Pf.

429. Hierauf gründen sich die Zerstreuungen der hier Landüblichen Gewichte, wie auch der Meißnischen Gülden, so noch an theils Orten gebräuchlich seyn, wozu ich folgende Täflein, sonderlich denen Anfängern zu Gefallen, hiemit will beyfügen, denn die geübtern können sothane Zerfällung selbst nach ihrem Belieben einrichten. Anmerck.

a.) Loth auf die Theile des Pfunds zerstreuet.

1	2	3	4	5	6	7	8
4 8	4 8	4 8	4 8	4 8	4 8	4 8	8 4
1 4	2 2	2 2		1 4	2 2	2 2	
		1 2				1 2	

9	10	11	12	13	14	15	16
8 | 4	8 | 4	8 | 4	8 | 4	8 | 4	8 | 4	8 | 4	16 | 2
1 | 8	2 | 4	2 | 4	4 | 2	4 | 2	4 | 2	4 | 2	
		1 | 2		1 | 4	2 | 2	2 | 2	
						1 | 2	

17	18	19	20	21	22	23	24
8 | 4	16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2
4 | 2	2 | 8	2 | 8	4 | 4	4 | 4	4 | 4	4 | 4	8 | 2
4 .		1 | 2		1 | 4	2 | 2	2 | 2	
1 | 4						1 | 2	

25	26	27	28	29	30	31	32
16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2	16 | 2	8 | 4	1
8 | 2	8 | 2	8 | 2	8 | 2	8 | 2	8 | 2	: | :	
1 | 8	2 | 4	2 | 4	4 | 2	4 | 2	4 | 2	4 | 2	
		1 | 2		1 | 4	2 | 2	2 | 2	
						1 | 2	

b.) Pfund auf die Theile des Steins (à 22 lib.) zerfället.

1	2	3	4	5	6	7
2 | II	2 | II	2 | II	2 | II	2 | II	2 | II	2 | II
/ | //		1 | 2	2 | .	2 | .	4 | (2	4 | (2
1 | 2				1 | 2		1 | 4

8	9	10	11	12	13	14
2 | II	2 | II	2 | II	II | 2	II | 2	II | 2	II | 2
6 | (3	6 | (3	8 | (4		1 | II	1 | II	1 | II
	1 | 2				1 | .	2 | (2

15	16	17	18	19	20	21
2 | 11 ⎫	11 | 2	2 | 11	2 | 11 ⎫	11 | 2	11 | 2	11 | 2
12 | (6 ⎪	1 | 11	10 | (5	12 | (6 ⎪	2 | 11	2 | 11.	2 | 11.
1 | 2 ⎭	4 (4	5 | 2	4 | (2 ⎭	6 | (3	1 | 2	8 (4
					6 (6	

c.) Pfund auf die Theile des Centners, (à 110 Pf.) eingerichtet.

1	2	3	4	5	6	7
10 | 11	10 | 11	10 | 11	10 | 11	10 | 11	10 | 11	10 | 11 ⎫
// | //	// | //	// | //	// | //	// | //	// | //	// | //
1 | 10	2 | 5	2 | 5	2 | 5	5 | 2	5 | 2	5 | 2
		1 | 2	2 | .		1 | 5	2 | 5 ⎭

8	9	10	11	12	13
10 | 11	10 | 11 ⎫	10 | 11	11 | 10	10 | 11	10 | 11
// | //	// | //			2 | 5	2 | 5
5 | 2	5 | 2				1 | 2
1 | 5	2 | 5 ⎭				
2 | (2	| .				

14	15	16	17	18	19
10 | 11	10 | 11	10 | 11	10 | 11 ⎫	10 | 11	10 | 11
2 | 5	5 | 2	5 | 2	5 | 2 ⎪	5 | 2	5 | 2
2 | .		1 | 5	2 | 5 ⎭	1 | 5	1 | 5
				2 (2	3 (3

20	21	22	23	24	25
10 | 11	10 | 11	22 | 5	10 | 11 ⎫	10 | 11	10 | 11
10 | .	10 | .		10 | . ⎪	10 | .	10 | .
	1 | 10		2 | 5 ⎭	2 | 5	5 | 2
			1 | 2	2 | .	

26

10	11
10	.
5	2
1	5

27

10	11
10	.
5	2
2	5

28

10	11
10	.
5	2
1	5
2	(2

29

10	11
10	.
5	2
2	5
2	.

30

10	11
20	(2

31

10	11
20	(2.
1	10

32

10	11
20	(2
2	5

33

22	5
11	2

34

22	5
11	2
1	11

35

22	5
11	2
1	11
1	.

36

10	11
20	(2
5	2
1	5

37

10	11*
20	(2
5	2
2	5*

38

10	11
20	(2
5	2
1	5
2	(2

39

10	11
20	(2
5	2
4	5

*

40

10	11
30	(3

41

10	11
30	(3
1	10

42

10	11
30	(3
2	5

43

10	11
30	(3
3	10

44

22	5
22	.

45

10	11
30	(3
5	2

46

10	11
30	(3
6	5

47

10	11
30	(3
6	5
1	10

48

10	11
30	(3
6	5
2	5

49

10	11
30	(3
6	5
3	10

50

10	11
40	(4

51

10	11
40	(4
1	10

52

10	11
40	(4
2	5

53

10	11
40	(4
2	5
1	2

54

10	11
40	(4
4	10

55 | 2

56

10	11
40	(4
5	2
1	5

57

10	11*
40	(4
5	2
2	5*

58

10	11
40	(4
8	5

59

10	11
40	(4
8	5
1	10

60

10	11
50	(5

61

10	11
50	(5
1	10

62

10	11
50	(5
2	5

63

10	11
50	(5
2	5
1	2

64

10	11
50	(5
2	5
2	.

65

55	2
10	11

66

11	10	
55	(5	

67

10	11
50	(5
5	10
2	5

68

55	2
10	11
2	5
1	2

69

55	2
10	11
2	5
2	.

70

10	11
60	(6

71

10	11
60	(6
1	10

72

10	11
60	(6
2	5

73

10	11
60	(6
2	5
1	2

74

10	11
60	(6
2	5
2	.

75

10	11
60	(6
5	2

76

10	11
60	(6
6	10

77

11	10	
66	(6	

78

10	11
60	(6
6	10
2	5

79

55	2
22	5
2	11

80

10	11
70	(7

81

10	11
70	(7
1	10

82

55	2*
22	5
5	11*

83

10	11
70	(7
2	5
1	2

84

10	11
70	(7
2	5
2	.

85

10	11
70	(7
5	2

86

10	11
70	(7
5	2
1	5

87

10	11
70	(7
7	10

88

22	5	
66	(3	

89

55	2
22	5
11	2
1	11

90	91	92	93	94
10 | 11 80 |(8	10 | 11 10 | . 70 |(7 1 | 10	22 | 5 66 |(3 2 | 11 2 | .	10 | 11 80 |(8 2 | 5 1 | 2	10 | 11 80 |(8 2 | 5 2 | .

95	96	97	98	99
55 | 2 10 | 11 30 |(3	10 | 11 80 |(8 5 | 2 1 | 5	10 | 11 10 | . 70 |(7 7 | 10	10 | 11 80 |(8 8 | 10	55 | 2 11 | 5 33 |(3

100	101	102	103	104
10 | 11 90 |(9	10 | 11 90 |(9 1 | 10	55 | 2 * 22 | 5 5 | 11 * 20 |(4	10 | 11 80 |(8 8 | 10 5 | 2	10 | 11 22 | 5 66 |(3 6 | 11

105	106	107	108	109
55 | 2 10 | 11 40 |(4 1	10 | 11 90 |(9 1 | 10 5 |(5	55 | 2 10 | 11 40 |(4 2 | 5	10 | 11 10 | . 22 | 5 66 |(3	10 | 11 90 |(9 9 | 10

d.) Groschen

d.) Groschen auf die Theile des Meißnischen Güldens à 21. Gr. resolviret.

1	2	3	4	5	6	7
3|7 1|3	3|7 1|3 1|.	3|7	3|7 1|3	3|7 1|3 1|.	3|7 3|.	7|3

8	9	10	11	12	13	14
7|3 1|7	7|3 1|7 1|.	7| 3 1| 7 2|(2	7|3 1|7 3|(3	3|7 9|(3	3|7 9|(3 1|3	7|3 7|.

15	16	17	18	19	20	21
7|3 7|. 1|7	7|3 7|. 1|7 1|.	7| 3 7| . 1| 7 2|(2	3| 7 15|(5	3| 7 15|(5 1| 3	3| 7 15|(5 1| 3 1| .	1.

430. Zu dem Gebrauch vorherstehender Tabellen ist folgendes mit bey zu behalten: Gebrauch voriger Tabellen.

1.) Unter ieder Anzahl derer Specierum stehen 2 Reihen Zahlen mit einer Linie unterschieden. Z. E. Unter 108 Pf. stehen erstlich die Theile, darein sie zerfället, nehmlich 10. 10. 22 und 66 = 108. Hernach die Operations - Zahlen mit ihren Signis, als 11 . 5] und (3

Gesetzt nun, es solten 108 Pf. mit 232 multiplicirt werden, so zeiget

2.) Die erste Operations-Zahl, so iedesmahl oben steht, daß man damit in den Multiplicatorem, (als hier in 232) dividiren müsse, (kommen hier 21 Cent. 10 Pf.) und so auch die folgende Zahl mit keinem Signo bemercket, muß man mit ihr in das, was herausgekommen, dividiren.

3.) Der darunter gelegte Punct aber bedeutet, daß man den vorigen Quotum müsse noch einmahl, (und wenn zwey Puncte noch zweymahl) darunter setzen, (daher schreibt man noch einmahl 21 Cent. 10 Pf. darunter.

4.) Eine Zahl mit einem einfachen Häckgen, (als hier die 5]) zeiget, daß man damit auch noch in den Multiplicatorem dividiren soll, als 5 in 232 geben 46 Cent. 44 Pf.

Wo aber das Connexions-Zeichen ( ]) oder ein Sternlgen stehet, muß man in denjenigen Quot dividiren, so aus des connectirten Theils Division heraus gekommen.

5.) Die 3, so in einen halben Mond eingeschlossen, will andeuten, daß man das letztheraus gekommene noch mit 3 zu multipliciren habe, (als 46 Cent. 44 Pf. mit 3 multiplicirt, geben 139 Cent. 22 Pf.

6.) Endlich addiret man alles zusammen, und stehet das Exempel also:

	108	232
	10	21 : 10
	10	21 : 10
	22	46 : 44
	66	139 22
(aus Tab. c.)	Fac.	227 : 86.

α.) Auf gleiche Weise.

Noch etliche Exempel.

98 Pf. mit 342 multiplicirt.

10	31 : 10
80	248 : 80
8	24 : 96
(aus Tab. c.) Fac.	304 : 76

Nehmlich wegen der 10 Pf. dividiret man erstlich mit 11 in den Multiplicatorem, kommen 31 Cent. 10 Pf. Und da 80 achtmahl so viel als 10, multiplicirt man das heraus gekommene mit 8, thut 248. Cent. 80 Pf. Endlich sind 8 Pf. der zehnde Theil aus 80, deswegen dividiret man noch das vorige mit 10, kommen 24 Cent. 96 Pf. und demnach zusammen 304 Cent. 76 Pf.

β.) Ein Leipziger Cubic-Schuch gantz dürre Eichen-Holtz waget 29. Pf. 21 Loth. Nun halten etliche dergleichen Stück Holtz 89 Cubic-Schuch, wie schwehr sind sie zusammen? Fac. 23 Cent. 109 Pf. 13 Loth.

Man multiplicire

29 Pf. und 21 Loth mit 89

10	16	8 : 10
5	4	8 : 10
2	1	4 : 5
		1 : 68
		1 : 68
		44 : 16
		11 : 4
		2 . 25
(aus Tab. c. und a.)	Fac.	23 : 109 : 13

γ.) Was betragen 78 Scheffel à 3 Fl. 19 Gr. 6 Pf.

234
7] 11 : 3
(5] 55 : 15
3] 2) 3 . 15
1 : 18 (Aus Tab. d.)

Fac. 306 Fl. 9 Gr.

XI. Vortheil. 431. Was massen man auch die grössern unbenannten Zahlen vermittelst der Quadrat-Taffeln gar leichtlich in einander multipliciren könne zeiget Jobus Ludolphus, * und soll davon zu Ende der Quadrat-Rechnung im II. Theil Meldung geschehen.

XII. Vortheil. 432. Eben dieser Autor hat noch eine Manier die Multiplicationes auch ohne Ein mahl Eins zu verrichten, welche der Herr Hof-Rath Wolff in seinen Elementis erläutert hat. ** Uber dieses kan solche Operation auch ohne Subtrahiren durch das darunter gesetzte blosse Duplum und Quintuplum geschehen, z. E.

Man multiplicire (das Simplum) 7354312.

mit 84673. Duplum 14708624
Quintuplum. 36771560

22062936
51480184
44125872
29417248
58834496

Fac. 622711659976

* Vid. Jobi Ludolphi Tetragonometrie p. 49. seqv.
** Vid. Herrn Hof-Rath Wolffs Elem. Math. Univ. Arithm. p. 38. §. 106.

Nehm

Nehmlich das Duplum bekommt man, so iede Ziffer des Multiplicandi noch einmahl zu sich selbst addirt wird. Das Quintuplum ist die Helffte vom Decuplo. Dahero kan man nur statt der Nulle an den Multiplicandum einen Punct setzen, und ihn halbiren, so giebt die Helffte das Fünfffache. Multipliciret man nun mit 3, so nimmt man das Duplum und Simplum zusammen.

4. Nimmt man iede Ziffer des Dupli doppelt.
6. Addiret man das Quintuplum und Simplum.
7. Nimmt man das Quintuplum und Duplum.
8. Addirt man das Quintuplum, Duplum und Simplum.
9. Addiret man zum Quintuplo iede Ziffer des Dupli doppelt genommen.

Von mehrern Abkürtzungen der Multiplication soll unten im Capite de Machinis Arithmeticis, desgleichen bey dem Gebrauch der Decimal-Brüche gedacht werden.

IV. In der Division.

433. Daß man eben nicht nöthig habe, alle Sorten der benannten Zahlen auf die kleinste zu resolviren, wenn man sie mit unbenannten Zahlen dividiren will, ist oben in der 12 Aufgabe pag. 100 schon angewiesen worden. Anmerck.

434. Gleichwie man vermittelst des Tarifs (§. 185.) die grössere Species so gleich auf die kleinere reduciren kan, wie im 410. §. gezeiget, so kan man dadurch hinwiederum die kleinern in die grössern verwandeln, als so man 78365 Pf. zu Gr. und diese zu Thl. machen will, stehet es also: I. Vortheil.

78365 Pf.
6530 : 5
Fac. 272 : 2 : 5

Man sage: 78 Pf. sind 6 Gr. 6 Pf. bleiben 6, hierzu die folgende 3, kommen 63 Pf. sind 5 Gr. 3 Pf. bleiben 3. Ferner 36 Pf. sind 3 Gr. bleibet 0. Dann 05 Pf. sind 0 Gr. bleiben 5 Pf. Weiter, 65. sind 2 Thl. 17. Gr. bleiben 17. 173 Gr. sind 7 Thl. 5 Gr. bleiben 5, hierzu die folgende Nulle, kommen 50, sind 2 Thl. 2 Gr.

II. Vortheil.

435. Zuweilen lässet sich so wohl der Divisor als Dividendus entweder durch eintzele Zahlen, oder durch die Elementa aus der Anatom. Numer. aufheben, und da dividirt man lieber mit denen aufgehobenen, (vornehmlich wenn solche Division, als unten in der Reg. Soc. Mixtionis, &c. soll repetirt werden.) Denn also bekommt man zugleich auf einmahl den kleinsten Bruch, der dem Quoto anzuhengen, z. E.

Man dividire mit 1841 die Zahl 9994. da denn

deren Elementa 263) und 7 desgl. 2. 19. 263) 38 ($5\frac{3}{7}$ Quotus. (§. 270.)

III. Vortheil.

436. Will man die kleinern Divisores auch vermittelst eintzeler Zahlen also in ihre Factores zerstreuen, so giebt es ebenfalls einen Vortheil. Denn da dividirt man mit dem ersten Factore in den Dividendum, und mit dem andern in den heraus gebrachten Quotum, z. E. statt 56 dividire man mit 7 mahl 8.

44275

7) ———

6325

8) ———

Fac. $790\frac{5}{8}$ (§. 296.)

IV. Vortheil.

437. Bleibet nach der ersten Division etwas übrig, so setze man das erste Residuum neben den ersten Quotum. Bleibet aber auch nach der andern Division etwas übrig, so multiplicire man den andern Rest mit dem ersten

Facto-

Factore, und addire zum Facto das erste Residuum, so giebt die Summe die Anzahl selbiger Theile, die der componirte Divisor benennet. Z. E. man resolvire

43715 Gr. in Thl.

$m=4)$ 10928 : 3 | $r=3$

$d=24$

$n=6)$ F. 1821 : 11 Gr. | $t=2$

Beweiß.

Es sey der Divisor $d = mn$, und der Dividendus $= mq+r$, so ist $mq+r$ dividirt

mit m) $= q+\frac{r}{m} = q+\frac{nr}{nm}$ (§. 355. 8.)

Nun dividire man $q+\frac{nr}{nm}$ mit n, und $q:n$ sey

$= f+\frac{t}{n} = f+\frac{mt}{mn}$ (§. 355. 8.)

$\frac{nr}{nm}$ aber dividirt mit $n = \frac{r}{nm}$ (§. 372. 8.) Demnach ist

der letzte Quotus $= f+\frac{mt}{mn}+\frac{r}{nm} = f+\frac{mt+r}{mn}$ (§. 369. 1.)

438. Wenn ein Divisor nahe an einen Numerum simplicem kömmt, als an die Hunderte, Tausende, Zehntausende ꝛc. so nehme man ihn um so viel Unitäten drüber, als er drunter ist, dividire mit den ersten Ziffern des Divisoris wie gewöhnlich, iedoch addire man noch das letzte Factum zum Dividuo, so kommen nicht allein die starcken Ziffern aus dem Divisore zum Theil hinweg, sondern es wird auch die Division um ein merckliches leichter, z. E. V. Vortheil.

z. E. statt 98 dividire man mit 102, statt 197 dividire man mit 203, als man dividire 3347 mit 98, und 73564 mit 197.

	3347(34		73564(373
102)	405	203)	1443
	1		68

Beweiß.

Es sey eine beliebige Zahl = *a* der Numerus simplex = *s*, und die Differentz, um welche der Divisor drunter ist = *d*, so ist ein Multiplum davon, und noch was drüber = *as* - *ad* + *b*, dividiret man dieses wie gewöhnlich mit *s* - *d*, giebt es *a*, und restiret *b*; Dividiret man es mit *s* + *d*, und addirt das letzte Factum Divisoris und Quoti, so kömmt auch *a*, und bleibt *b* übrig, wie zuvor. Denn — von — subtrahirt, geht eben so auf, als + zu — addirt.

Anmerck. 439. Dieses Compendii Divisionis hat sich Erhardus Weigelius bedienet, und nennet er es per Divisorem Vicarium, oder einen Zahl-Wechsel zum leichtern Dividiren. *

IV. Vortheil. 440. Uber die oben im 147. s. angezeigte Division à la Indienne findet man noch eine in des Herrn Hof-Rath Wolffs Elem. Math. Univ. Arithm. pag. 42. Allwo (ohne das Ein mahl Eins dabey zu gebrauchen,) der Tarif nur auf 3 Sätze reduciret, nehmlich nur aufs Simplum, Duplum und Quintuplum, denn die übrigen Multipla kan man auch nach dem 432. s. bekommen. Will man nun z. E. eine Zahl: 136802604 mit 42132 dividiren, so setze man den contrahirten Tarif bey Seite:

* Vid. Erhardi Weigelii Idea Matheseos Universæ pag. 44. seq.

1.) 42132	ɪ36802.02|6|0|4(3247
2.) 84264	1.04. 62.2
5.) 210660	198.09
	278
	94

Nehmlich man hält den ersten Dividuum 136802 in Gedancken gegen die 3 Sätze des abbrevirten Tarifs, und siehet, welchem Multiplo, oder summirlichen Multiplis er am nechsten kömmt, als hier ist er grösser, als das Duplum, aber auch kleiner, als das doppelte Duplum, welches schon 16 Myriades beträgt, da hingegen der Dividuus nur 13 Myriades hält. Derowegen fält solcher Dividuus ins Triplum (das ist in das Duplum mit dem Simplo) und demnach setzet man 3 vor die erste Quots-Ziffer, subtrahiret vom Dividuo die Summam Dupli & Simpli, so restiret 10406; Hierzu nehme man eine neue Ziffer aus dem Dividendo, nehmlich die folgende 6, so kommt der andere Dividuus 104066, dieser ist etwas grösser, als das Duplum, aber auch nicht so groß, als das Triplum, und deswegen setze man 2, als die Anzeigungs-Ziffer des Dupli, in Quotum, und subtrahire vom solchen Dividuo das Duplum, restirt 19802, hierzu die folgende Ziffern im Dividendo (0) genommen, giebt den dritten Dividuum 198020. Dieser ist kleiner, als das Quintuplum, aber grösser als das doppelte Duplum, derowegen fält er ins Quadruplum, und giebt im Quot 4, voriges Quadruplum von diesem Dividuo subtrahirt, läst 29492, hierzu die letzte Ziffer des Dividendi genommen, giebt den letzten Dividuum, nehmlich 294924, und dieser fält in die Sume des Quintupli und Dupli, dahero setzet man zur letzten Quots-Ziffer 7, subtrahiret vom letzten Dividuo die summam Quintupli und Dupli, so gehet alles auf, und ist demnach der Quotiente 3247 ohne das Einmahl Eins zu wissen, und ohne Correction des zu weilen falsch genommenen Quoti heraus gebracht.

441. Wie

Anmerck. 441. Wie man vermittelst einiger Rechnungs-Instrumente bequehmlich dividiren könne, soll unten im Capite de Machinis Arithmeticis berührt werden, desgleichen wird es im Capite Reductionis auch noch einen Vortheil geben, die benannten Zahlen durch Hülffe der Decimal-Theile so wohl zu multipliciren, als zu dividiren.

7. Von den Proben der 4 anfänglichen Rechnungs-Operationen.

Nutzen der Proben. 442. Die Proben gehören mit unter die nöthigsten Dinge der Rechnungen, sie geben eine Versicherung, daß wir in Application der Reguln nicht verfehlet, * sie machen die Anfänger geschickt die Sätze zu verändern und zu zergliedern, aufmercksam genau zu verfahren, geduldig und curiös zu sehen, ob sie andere Operationes auch behalten, und die Sätze gehörig herauskommen.

Ihr Unterscheid. 443. Die vornehmsten geschehen theils durch eben dieselbe, theils durch contraire Operation, theils durchs würckliche, theils auch durchs erspahrte dividiren, nehmlich per Abjectionem Novenarii.

α.) Probationes Additionis.

1. Probe. 444. Sie wird durch sich selbst probirt, wenn man einmahl von unten hinan, und das andere mahl von oben herunter addiret, und einerley Summe heraus bringt, oder wenn man lange Reihen in unterschiedene Abschnitte vertheilet, ieden Abschnitt besonders summiret, so müssen die kleinern Summen endlich zusammen genommen, dem erst gefundenen völligen Aggregat gleich seyn. (§. 253.)

* Vid. Herr Hof-Rath Wolffii Elem. Arith. p. 45. in fine.

445. Durch contraire Operation nimmt man einen oder etliche Theile des Gantzen von der Summa wieder hinweg, und siehet zu, ob der übrige Theil auch noch eben derjenige ist, welcher anfangs oder zuletzt mit addirt worden. (§. 77. 78.) 2. Probe.

446. Mich. Strauchius, ehemahliger Prof. Math. in Wittenberg, hat in seiner Doctr. Num. noch gar eine ingenieuse Probe des Addirens durchs dividiren, da er nehmlich den grössern Theil mit dem kleinern dividirt, und den Quot um eine Unität vergrössert, wovon denn das Factum Divisoris und des also vergrösserten Quots † den Residuo der Summe gleich wird, wenn man recht addirt hat. z. E. 3. Probe.

42	2	
53	34	
65	192	(4
74	42)	1
thun in Summa: 234	= 234	(5

Nehmlich man dividirt mit dem ersten Parte (42) in die Summe der 3 letzten Partium (192,) kommt im Quoto 4, hierzu addiret man 1, kömmt 5, damit multiplicirt man den Divisorem (42) und nimmt das Residuum (24) so gleich mit dazu, thut wiederum 234.

Beweiß.

Es sey von $a > b$ die Summa $= a + b$, und $a : b$ sey $= q + \frac{r}{b}$, so ist $bq + r = a$ (§. 133.) Addiret man nun zum Quoto q eine Unität, kömmt $q + 1$, so mit b multiplicirt, $bq + b$ giebt, hierzu das Residuum r addirt, bringt $bq + b + r = a + b$. (§. 242.)

447.

4. Probe. 447. Uber diese ist die Abjectio Novenarii eine der behendesten Proben, nicht allein in der Addition, sondern wie bald folgen wird, auch in den übrigen Rechnungs-Operationen. Denn da gleiches mit gleichen dividirt, gleiche Quotos, und folglich auch gleiche Residua giebt, (§. 284. 143.) so müssen auch nach der Division mit 9 so wohl in alle Partes, als auch in das Totum gleiche Residua bleiben.

Nun gehet zwar dieses mit allen Zahlen an; z. E. mit 8 oder 7 ꝛc. als mit 8)

$$\left.\begin{matrix}332 & & 4\\ 171 & \text{rest.} & 3\end{matrix}\right\} = 7 \quad \&c.$$

503 restiret 7

Allein an statt man mit 8 oder 7 die Residua würcklich heraus dividiren muß, so stehen sie in der Division mit 9 schon allbereit vor Augen, nemlich 171 mit 9 dividirt, geht auf, und 332 läst 8 übrig, also restirt aus allen Partibus 8, eben so wie aus dem Toto 503 auch 8 restiret. (§. 374.)

Gleichwie sich nun nicht alle Propositiones convertiren lassen, und auch hier nicht gilt, daß alle Zahlen einander gleich seyn, wo nach der Division gleiche Reste bleiben, weiln aus der Division mit 9 in 530, 305, oder auch 512, auch 8 übrig bleiben, also hat dieses viele abgeschrecket, weil daher solche Probe falliren kan. Darauf dienet aber zu wissen, daß man es in einem Exempel wenigsten zweymahl versehen müsse, (und zwar per compensationem) wenn solche Probe nicht eintreffen soll, welches von einem nur wenig geübten, (& ubi non est fallendi Studium, wie der Herr E. Wels schreibet *) nicht so leicht zu vermuthen ist.

Anmerck. 448. Jetzt gedachter Herr Autor mercket noch mit an, ** daß die Ausstreichung der 9ten Zahl gleicherge-

* Vid. E. Wels in Elem. Arithm. p. 48. ** pag. 50.

stalt

stalt in benahmten Zahlen Platz finde, wenn man nehmlich bey den unterschiedenen Benennungen nur von einer auf einmahl die Probe macht, und zwar ehe sie auf die folgenden grössere Species reducirt seyn.

5. Probe.

449. Eine noch gar bequehme Probe zeiget ein Frantzösischer Autor, * und hat solche so wohl in benannten als unbenanten Zahlen ihren Nutzen, sonderlich wenn die Perpendicul etwas lang sind, als so man addiret

	Thl.	Gr.	Pf.
	12	18	3
	26	16	6
	47	10	4
	9	8	3
ist die Sum.	96	5	4
Prob.	2 ...	1 ...	0

Nehmlich man fängt von der grösten Sorte, z. E. hier von Thl. an, zehlet sie aufs neue zusammen, als hier 94, subtrahiret sie von 96, bleiben 2 Thl. an diesen Rest setzet man etliche Puncte, um damit zu bemercken, daß man die 2 Thl. mit den nebenstehenden 5 Gr. zusammen nehmen müsse, werden 53 Gr. Ferner addirt man auch aufs neue noch einmahl die Gr. kommen 52 Gr. diese von 53 Gr. bleibt 1 Gr. woran man wieder etliche Puncte setzet, damit er zu folgenden 4 Pf. desto unvergeßlicher genommen werde; Endlich addirt man auch nochmahls die Pf. kommen 16 Pf, und diese von 1 Gr. 4 Pf. oder 16 Pf. subtrahirt, gehen auf, und ist daher die Operation richtig. (§. 445.)

β.) Probationes Subtractionis.

450. Weil der Numerus ex quo (oder Minuendus) im Subtrahiren eben dasjenige ist, was die Summe im Addi- Probe überhaupt.

* N. Binet in s. Arithmeticien familier. p. 45.

ren, und der Subtrahendus nebst dem Residuo nichts anders, als die Partes davon sind, (s. 77.78.) so gehen die meisten Proben des Addirens auch im Subtrahiren von statten, wenn man mit dem Subtrahendo und Residuo eben so verfährt, wie oben mit denen Addendis, und mit dem Numero ex quo so procediret, wie im Addiren mit der Summe.

Probe insonderheit.

451. Wenn man von einer grössern Zahl viel kleinere nach und nach subtrahiret hat, so addire man diese alle mit ihren Differentzen zusammen, dann dividire man diese Summe mit der Anzahl der subtrahirten Zahlen, so giebt der Quotus wieder den Numerum ex quo, z. E. man suche der Zahlen 365, 378, 384 Differentzen von 412, und mache hierauf die Probe:

Beweiß.

	412	*a*
	365	*b*
I. Diff.	47	*a - b*
	378	*c*
2. Diff.	34	*a - c*
	384	*d*
3. Diff.	28	*a - d*
Sum.	1236	3*a*. Sum.
3)		3)
	412.	*a*. (§. 255.)

γ.) Probationes Multiplicationis.

1. Probe. 452. Durch sich selbst probiret man das Multiplici-
ren, so man die Efficienten verwechselt, als wenn 738
mit

mit 296 zum Product: 218448 giebt, so multiplicire man 296 mit 738, kömmt eben das Factum. (§. 273.)

Oder man multiplicire den halben Multiplicandum mit dem doppelten Multiplicatore, als hier 369 mit 592, oder ein Drittel des Multiplicandi mit dem dreyfachen Multiplicatore &c. Denn so die Efficientes *a* und *b*,

ist $\frac{a}{m} . mb = \frac{amb}{m}$ (§. 371. c.) $= ab$. (§. 360.)

453. In benahmten Zahlen kan man z. E. 54. einmahl mit 3 Thl. 15 Gr. 8 Pf. gewöhnlich practice vermehren, das andere mahl aber die 3 Thl. 15. Gr. 8 Pf. nach Mon. de Claire Combe Manier mit 54 multipliciren. Denn eben darinne gehet seine Art von der andern bißher gebräuchlichen ab, daß die efficienten, (wie er schreibet *) verkehret werden. 2. Probe.

Thl.	Gr.	Pf.		
43:	15:	8	mit	54
				162
2	3			216
8				27
				6: 18
				18
				18

Fac. 2357: 6 (§. 423.)

Probe:

Thl.	Gr.	Pf.		Mem.
43.	15.	8		6. 4.
			(54	
174:	14:	8		
2182:	15	4		

Fac. 2357: 6. — (§. 419.)

* La Multiplication par les Parties Aliquotes est la plus ancienne de toutes, & l' Operation de celle est directement opposée à l' Operation de la mienne p. 133.

3. Probe. 454. Durch die contraire Operation geschicht die Probe, wenn man das Factum mit einem Factore dividiret, und den andern Factorem wieder heraus bringt. (§. 124.)

4. Probe. 455. Insonderheit nach Æg. Strauchii Methode, so man den einfachen, doppelten, zehnfachen ꝛc. efficienten vom Facto subtrahiret, und den Rest mit dem simplen efficienten dividiret, da denn alles aufgehen muß, wenn recht multiplicirt ist. (§. 289.)

Z. E. Man multiplicire 356 mit 47 und probire es also:

356. 47 = 16732

Hiervon subtr. 3560

13172 (37.
350) 469
244
3

5. Probe. 456. Man probiret auch das Multipliciren per Abjectionem Novenarii sehr behende, wenn man jeden Factorem mit 9 dividirt, die Reste in einander multiplicirt, und dieser ihr Factum wieder mit 9 dividirt, so bleibt eben so viel übrig, als wenn man das Haupt-Factum mit 9 dividirt.

Z. E. 84 mit
59

756
420

Fac. 4956

Aus 84 bleibt 3 | 3. 5 = 15 hieraus
Aus 59 bleibt 5 | bleibt 6.

Aus dem Haupt-Facto bleibt auch 6. (§. 373. 374.)

Be-

Beweiß.

Es seyn zwey so grosse Factores als man will $= md+a$ und $rd+b$, so restiret nach der Division mit $(d-1)$ aus dem

ersten: $m+a$

und aus dem andern: $r+b$ (§. 373.) und ist

das Factum Residuorum $= rm+ra+mb+ab$.

Multipliciret man beyde Factores $md+a$ und $rd+b$.

so ist das Haupt-Factum = | $mrd^2+rda+mdb+ab$ (
dieses mit $d-1$) dividirt, | $mrd+mr+ra+mb$
bringt im Quoto: | $mrd+mr+ra+mb$

Und ist das ietzige Residuum dem vorigen Facto Residuorum gleich, dahero muß nach der Division mit einerley Divisore in einem so viel übrig bleiben, als im andern. (§ 284. 143.)

457. Dieses gehet zwar auch mit andern Zahlen an, aber die Divisio per Novenarium zeigt ihren Quotum so gleich ohne Mühe, (s. 374.) und ist deswegen so wohl leichte als geschwinde. Anmerck.

d.) Probationes Divisionis.

458. So man den Divisorem und Quotum als Factores und den Dividendum als ihr Factum betrachtet, (§. 129.) lassen sich die Multiplications-Proben auch gar leichtlich in der Division brauchen. Nehmlich Uberhaupt. Insonderheit.

459. Man dividiret mit dem Quot in den Dividendum, so muß der Divisor wieder heraus kommen. 1. Probe.

460. In benannten Zahlen dividiret man mit dem doppelten Divisore, so muß nur halb so viel im Quotienten kommen, oder mit dem halben Divisore, so muß der Quotus doppelt kommen, &c. 2. Probe

3. Probe. 461. Durch contraire Operation erfähret man die Gewißheit des Dividirens durchs Multipliciren, wenn das Factum Divisoris und Quoti + dem Residuo den Dividendum wieder herstellet. (§. 133.)

4. Probe. 462. Auch kan man den zehnfachen, hundertfachen ꝛc. Divisorem vom Dividendo subtrahiren, und den Rest mit dem einfachen Divisore dividiren, so muß eben so viel überbleiben, als zuvor.

Z. E. 4973 : 84 = 59 und restiren 17.
840

41.33 (49.
84) 997
756
I

5. Probe. 463. Endlich muß auch nach der Abjection des Novenarii im Divisore und Quot aus dem Facto Residuorum des Divisoris und Quoti eben so viel übrig bleiben, als aus dem Dividendo — seinem Residuo. (§. 457.)

Und dieses mag von den Operationibus primariis genug seyn, wenigsten düncket mir, daß hierdurch zur Ausübung und Abkürtzung der folgenden ein zulänglicher Grund geleget worden.

II.

II. Theil.

Von denen Operationibus Secundariis, oder anwachsenden Rechnungs-Arten.

§. 464.

Inhalt des andern Theils.

Nachdem man gesehen, wie sich die Zahlen nach ihrem Gehalt vermittelst der 4 ursprünglichen Operationen verändern lassen, so ist nun auch noch übrig zu zeigen, wie sie so wohl nach der Stellung ihrer Theile, als auch wie der Gehalt der einen, in den Gehalt der andern zu verwandeln, desgleichen wie zu einigen gegebenen eine oder etliche andere gefunden werden, die so vielmahl in einander enthalten, als die gegebenen, und endlich überhaupt, wie man die bekannten und unbekannten schicklich mit einander vergleichen, und hieraus die Geltung der unbekannten heraus bringen möge, das ist, wenn man es kürzer aussprechen will, was es ihm folgenden mit der Figuratione, Reductione, Proportione und Æquatione Numerorum vor eine Bewandniß habe. (§. 83.)

Grund der Eintheilung.

465. Der Grund dieser Ordnung ist in der Gemächlichkeit der Operationen selbst zu suchen. Denn will man von den Figürlichen Zahlen eine in die andere verwandeln, muß man erst wissen, wie selbige entstehen, und was sie vor Eigenschafften haben. Sollen zwey ungleichbenannte Dinge so und so offt in einander enthalten seyn, müssen sie vorhero auf gleich benannte reducirt werden, und will man den Valorem der unbekannten aus denen bekannten heraus bringen, so muß man die erstern vorher in eben die Verhältniß setzen, welche von denen letztern angezeiget worden.

I. Capitel.

Von der Figuratione Numerorum oder von Figürlichen Zahlen.

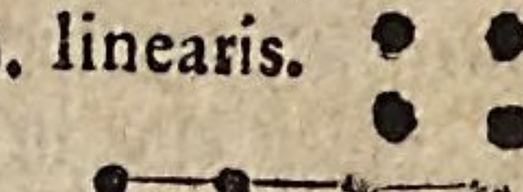
§. 466.

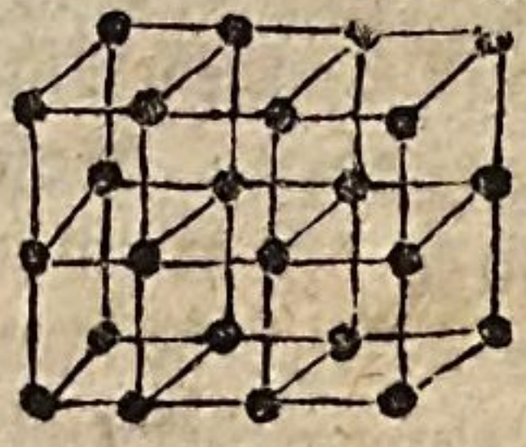
Erklär. Eine Figürliche Zahl ist nichts anders, als eine Menge Unitäten, Strichlein, oder Puncte, so man nach einer gewissen Stellung geordnet.

Also ist 6 eine Figürliche Zahl, wenn man ihre Einheiten z. E. nach einem Triangul ∴ oder nach einer ablangen Fläche :: ordnet.

Anmerck. 467. Die Alten nennten eine solche Zahl Numerum secundum Figuram, qui per suas unitates explicatur. *

Ursprung der figürlichen Zahlen. 468. Nun kommen die Haupt-Stellungen der Dinge vornehmlich darauf an, daß man sie entweder bloß in einer langen Reihe **nacheinander**, oder daß man sie auf eine Fläche in etlichen Reihen **neben einander**, oder auch, daß man über die also neben einander gestellte Reihen noch einige **darauf** setzet. Die erste Art giebt uns überhaupt eine **Längen-Zahl**, Numerum Linearem, die andere Art eine **Flächen-Zahl**, Numerum Planum, die dritte Art eine **Cörper-Zahl**, Numerum Solidum. Z. E.

. . . (3) ist num. linearis.  (6.) = 3.2 ist

num. planus, und  (24) = 4. 2. 3.

ist ein num. solidus.

* Sever. Boëtius in Introduct. Arithm. fol. 3. und 4.

469. Es

469. Es ist aber von sich selbst schon zu erachten, daß man die Puncte oder Theile nicht wie Kraut und Rüben zusammen raffen müsse, sondern ein ieder Zusammen-Satz will seine Ordnung haben, und auf einerley Art geschehen, denn wie Barrow an einem Orte schreibet: Uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed Artes etiam atque scientiæ vehementer affectant. * Dahero da es nicht allein auf das ordentliche Zusammennehmen, oder den compl. partium, sondern auch auf die Stellung oder Transposition der also zusammen gebrachten Theile ankömmt, (§. 56. 58. 59.) so habe es vor nützlich erachtet, die Genesin der Figürlichen Zahlen überhaupt in einer mit beygefügten Tabelle etwas genauer vorzustellen, zu dero leichtern Begriff aber zuvorhero noch in etwas von den Potentzen, und gleich viel zu oder abnehmenden Zahlen zu handeln. Anmerck.

470. Wenn eine grössere Zahl just so offt eine kleinere, und diese eben so offt eine noch kleinere, und so weiter, in sich enthält, als die letzte kleinere die Unität, so nennet man die Zahlen, so vor der Unität kommen, Potentzen, (Potestates, Dignitates,) und zwar die nechste bey der Unität die erste, die folgende grössere, die andere, und die darauf kommende, die dritte Potentz, u. s. w. Erklär.

Z. E. Wenn 81 so vielmahl 27, als 27 die Zahl 9, und als 9 die Zahl 3, und als 3 die Unität in sich begreifft, so ist 3 die erste Potentz, so auch die Wurtzel oder Seite, (Radix oder Latus) von denen folgenden Potestäten heist.

9 Die andere
27 Die dritte
81 Die vierdte Potentz ꝛc. und also auch in andern Zahlen.

* V. Is. Barrow. Lection. Geometr. Lect. III. p. 27.

Anmerck. 471. Und hieraus siehet man den Ursprung des Worts: Potentz, denn Numerus potest numerum, heist eben so viel, als Numerus comprehendit in se numerum.

Zusatz. 472. Weiln in $n^3, n^2, n^1, 1$

oder n^3, n^2, n^1, n^0

desgleichen im n^4, n^3, n^2, n^1 &c. das Factum der mittelsten gleich ist dem Facto der eussersten, nehmlich $n^2 . n^1 = n^3$ oder $n^2 . n^1 = n^3 . n^0 = n^3$, desgleichen $n^3 . n^2 = n^4 . n^1 = n^5$, (§. 235.) so sind vorhergehende Reihen Expressiones Potentiarum universales, (§. 271.) davon ieder Exponente den Gradum seiner Potentz anzeigt, und iede Potestät mit der ersten multiplicirt, die folgende zum Vorschein bringt.

Anmerck. Daß man aber vor die Unität in solchem Calculo n^0 substituiren kan, ist leicht zu sehen. Denn $n^2 . n^0 = n^2$ (§. 235.) $n^2 . 1 = n^2$ (§. 119.) folglich ist $n^0 = 1$. (§. 265.)

Zusatz. 473. Demnach ist die Genesis Potentiarum, (sonst Involutio genannt,) nichts anders als ein continuirliches Multipliciren einer Zahl oder Quantität durch sich selbst.

So $n = 3$, ist $n^2 = 3.3 = 3^2$ oder 9. und heist die andere Potentz oder Quadrat-Zahl von 3, deren Unitäten man just in eine viereckigte Figur setzen kan, als

So $n = 3$, ist n^3 oder $3^3 = 3.3.3 = 27$. und heist die dritte Potentz von 3, oder eine Cubic-Zahl, deren Unitäten man in der Figur eines Würffels disponiren kan.

So

So $n = 3$, ist n^4 oder $3^4 = 3.3.3.3 = 81$, und heist die vierdte Potentz, oder eine Quadrado-Quadrat-Zahl, nehmlich $3^2.3^2 = n^2.n^2$, deren Unitäten man in so viel Quadrate resolviren kan, daß solche kleinere Quadrata just wieder ein grösser Quadrat ausmachen, und so weiter.

474. Die Italiänischen Zeichen der Potentzen aus der alten Regula Cos, (oder Cosæ, davon die Numeri Cossici,) so aus den Buchstaben R. Z. C. S. (Res oder Radix, Zensus, Cubus, Sursolidus) hergeleitet worden, werden iezt wenig mehr adhibiret, die andern sind in folgender Tabelle zu sehen pag. seqv. Anmerck.

NB. 475.

476. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliciret, und sie noch dazu addiret, so heist dieses pronice multipliciren, und die daraus entstandene Zahl eine Pronic-Zahl, (Numerus pronicus) als 12 ist $= 3.3 + 3 = 3^2 + 3$, und daher ist 12 eine Pronic-Zahl. Erklär.

477. Uberhaupt ist das Symbolum eine Pronic-Zahl $n^2 + n$, deren Wurtzel n ist, und $n^2 - n$ ist eine Pronic-Zahl, deren Wurtzel $n-1$ ist. Denn $(n-1).(n-1) = 2n^2 - 2n + 1$ hierzu $n - 1$ addirt, giebt $n^2 - n$. Daher ist das Factum zweyer auf einander folgenden Naturalium allezeit ein Num. Pronicus. Zusatz.

478. In dem $(n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n$, so differiren alle Zusatz. auf einander folgende Pronic-Zahlen um die doppelte gröste Wurtzel, und erwachsen also aus der Addition der auf einander folgenden graden Zahlen. (§. 248.)

0	2	4	6	8	10	12	
0	2	6	12	20	30	42	&c.

Deßwegen sie auch lauter grade Zahlen seyn. (§. 250)

n^1	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
N.	Nq.	Nc.	Nqq.	Nqc.	Ncc.	Nqqc.	Nqcc.	Nccc.	Nqqcc
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

Abhandlung

268

479. Die andere Potentz oder eine Quadrat-Zahl aus einer zwey-theiligen Wurtzel hält in sich 3 Theile: 1.) das Quadrat des grossen, 2.) das Quadrat des kleinen Theils. 3.) Das Factum aus beyden Theilen zwey mahl genommen. Lehrsatz.

Z. E. 23^2 oder das Quadrat von 23 hält in sich 20.20 $=$ 400. Ferner 3.3 $=$ 9 dann 2 (20.3) $=$ 120.

Beweiß.

Es sey der grössere Theil a der kleinere b, so ist die zwey-theilige Wurtzel $a+b$

diese mit sich multipl. $a+b$

giebt: $a^2+2ab+b^2$ (§. 473. 235.)

480. Das Zeichen einer von zwey- und mehr Theilen entstandenen Potentz ist eine Linie oder Parenthesis mit derselben Exponenten $a+b$ oder $(a+b)^2$ (§. 211.) Anmerck.

481. Aus vorhergehendem Lehrsatz fliesset ein Vortheil in der der Quadratischen Multiplication, denn da kan man in folgenden Exempeln, also gleich den einen Theil mit dem doppelten andern multipliciren, 1. Vortheil in Quadrireil.

Als: 56
56

Quadr: $=$ 3136

Nehmlich das andere mahl nimmt man 5 doppelt, und spricht: 10 mahl 6 ist 60 ꝛc.

482. Hat nun eine Wurtzel mehr Theile als zwey, so kan man etliche vor einen nehmen, und sie dennoch als eine zweytheilige Wurtzel ansehen, welches wiederum 2. Vortheil.

ein

ein Compendium giebt, nach kleinern Tabellen * dennoch die grössern Quadrat-Zahlen vollends leichtlich heraus zu bringen. Z. E. Man soll von der

	a	b	
Radice	957	48	das □ formiren.

$a^2 = 915849$

$2ba = \begin{cases} 5742 \\ 8613 \end{cases}$ $\quad 96 = 2b$

$b^2 = 2304$

Fac. $916767950 4 = (95700+48)^2$

Nehmlich das gröste und kleinste Quadrat schreibt man aus den Tabulis, multipliciret den grosten Theil mit den doppelten kleinern, und observiret im unterschreiben die Stellen nach dem 110. §. f.

Zusatz. 483. Das Quadrat eines Bruchs ist das Quadrat des Zehlers dividirt mit dem Quadrat des Nenners. (§. 473 371. 349.)

$$\text{Also ist } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \;\Big|\; \left(\frac{a-b}{x}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{x^2}$$

Lehrsatz. 484. Weil die Quadrata der einzelen Zahlen alle mit einander entweder in 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 ausgehen (§. 475.) so müssen sich auch die gröstten Quadrat-Zahlen in dergleichen Ziffern endigen, (§. 116.) und derowegen sind alle Zahlen, so in 2. 3. 7 oder 8 ausgehen, keine vollkommene Quadrat-Zahlen.

* Des Herrn Hof-Rath Wolffii Tab. Quadr. (& Cub.) gehen biß 1000. Des Prestets in s. Elem. des Mathem. T. II. in fine biß 10000. Jobi Ludolphi in der Tetragonometrie biß 100000.

485. Mehrere, und zwar zusammen gesetzte Endigungen findet man noch beym Prestet unter dem Tit. de la Fin des Qvarrez. * Anmerck.

486. Da auch das Collect der Zehn anfänglichen Quadrat-Zahlen iederzeit 1, 4, 7 oder 9 macht, (§. 475.) (nehmlich wenn man mit 9 in dergleichen Quadrat-Zahlen dividiret, bleibt 0, 1, 4, oder 7 übrig,) so muß auch aus denen grösten Quadrat-Zahlen das Collect nichts anders, als 1. 4, 7 oder 9 machen. Anmerck.

Denn es sey eine so grosse Wurtzel,

als man will $= ed+a$, so ist

ihr Quadrat $= e^2d^2+2aed+a^2$ $(e^2d+e^2+2ae$
(1 (1111

Dieses mit $d-1$ divid. e^2d+e^2+2ae
(1

lässet den Rest: $e^2+2ae+a^2$ welcher wieder ein Quadrat, (§. 480. und so (hier in Speciebus) dessen Seite $e+a$ grösser als 10, nenne man sie $nd+p$, dann muß $(nd+p,)^2 : (d-1)$ nothwendig wieder ein kleiner Quadrat übrig lassen, welches letzlich doch in die anfänglichen Quadrata fallen muß, deren Rest post Abjectionem Novenarii 0, 1, 4 oder 7 ist. (§. 374.)

487. Demnach hat man es in der quadratischen Multiplication versehen, wenn in dem Facto das Collect 2, 3, 5, 6 oder 8 austrägt. Zusatz.

488. So man mit 8 dividiret ein Quadratum { par, restiret 0 oder 4, / impar, restirt allezeit 1. ** Lehrsatz.

* P. Prestet Elemens des Mathematiques Tom. II. pag. 472.

** Vid. Mr. Rolle Methode pour resoudre les Egalites pag. 124

Das

Das Quadrat von $2n$ ist $=4n^2$, dieses dividirt mit 4. 2 giebt $\frac{n^2}{2}$ (§. 296.) Ist n^2 ein Numerus par, so restirt 0 (§. 248.) Ist n^2 ein Numerus impar, so restiret $\frac{1}{2} = 4:8$. Ferner ist das Quadrat von $2n+1 = 4n^2+4n+1$ (§. 479.)

Dieses mit 4) $n^2+n+\frac{1}{4}$

bringt: 2) $\frac{n^2+n}{2}+\frac{1}{8}$

n^2+n ist ein Pronicus und allezeit par (§. 478.) Daher bleibt nicht mehr als 1 oder $\frac{1}{8}$ übrig. (§. 437.)

Zusatz. 489. Also sind dieses keine Quadrat-Zahlen, wo nach der Division mit 8 nicht entweder alles aufgehet, oder nicht 1 oder nicht 4 übrig bleibt.

Lehrsatz. 490. Die dritte Potentz oder eine Cubic-Zahl aus einer zweytheiligen Wurtzel hat 4 Theile: 1.) den Cubum des grössern, 2.) den Cubum des kleinern Theils. 3.) das dreyfache Factum aus dem Quadrat des grössern Theils in den kleinern Theil. 4.) Das dreyfache Factum aus dem Quadrat des kleinern Theils in den grössern Theil.

Z. E. 23^3 oder $(20+3)^3$ hält in sich

$20^3 = 8000$
$3^3 = 27$
$3.20^2.3 = 3600$
$3.3^2.20 = 540$
$23^3 = 12167$

Beweiß.

$((a+b).(a+b).(a+b))$ ist $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (§. 473. 235.)

491. Zur

491. Zur Cubischen Involution der grössern Zahlen bedienet man sich der Quadrat- und Cubic-Tafeln, und so sie weiter hinan steigen, gebrauchet man den Vortheil, wie oben bey den Quadrat-Zahlen. (§. 482.) Z. E. Es soll der Cubus von 9863 gefunden werden, so nehme man den grössern Theil (986) *a* und den kleinern (3) *b*. Vortheil.

a	*b*
986	3

958585256	$= 986^3$
27	$= 3^3$
8749764	$= (986)^2.3.3$
26622	$= 986.3^2.3$
959460498647	$= 9863^3$. (§. 490.)
Dessen Collect $= 71$	$= 8$.

492. Wenn man das Collect aus denen zehen anfänglichen Cubis betrachtet, (§. 475.) so wird man wahrnehmen, daß es iederzeit 1, 8, oder 9 macht, nehmlich wenn man 9 daraus so vielmahl hinweg wirfft, als es angehet, (das ist mit 9 dividirt, (s. 373.)) bleibt nichts, oder 1, oder 8 übrig, und dieses geschiehet auch bey den folgenden grössern Cubis, welche im Collect allwege 1, 8 oder 9 machen müssen, wenn sie vollkommene Cubic-Zahlen seyn. Anmerck.

Beweiß.

Es sey eine so grosse Wurtzel als man will $= ed + a$, so ist deren Cubus $= e^3d^3 + 3ae^2d^2 + 3a^2ed + a^3$ (s. 490.) Diesen dividire man mit $d-1$, kömmt vor den Quotienten $e^3d^2 + e^3d + e^3 + 3ae^2d + 3ae^2 + 3a^2e$, und bleibt im Residuo: $e^3 + 3ae^2 + 3a^2e + a^3$ welches wieder ein Cubus. (§. 490.) und so dessen Seite (hier in Speciebus) $e + a$ grösser als 10, nenne man sie $nd + p$. Dann wird $(nd + p)^3 : (d-1)$ wieder einen kleinern Cubum

übrig lassen, welcher zuletzt doch in die anfänglichen Cubos fallen muß, so im Collect 1, 8 oder 9 machen.

Zusatz. 493. Folglich können diejenigen Zahlen keine Cubos abgeben, deren Collect 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 macht.

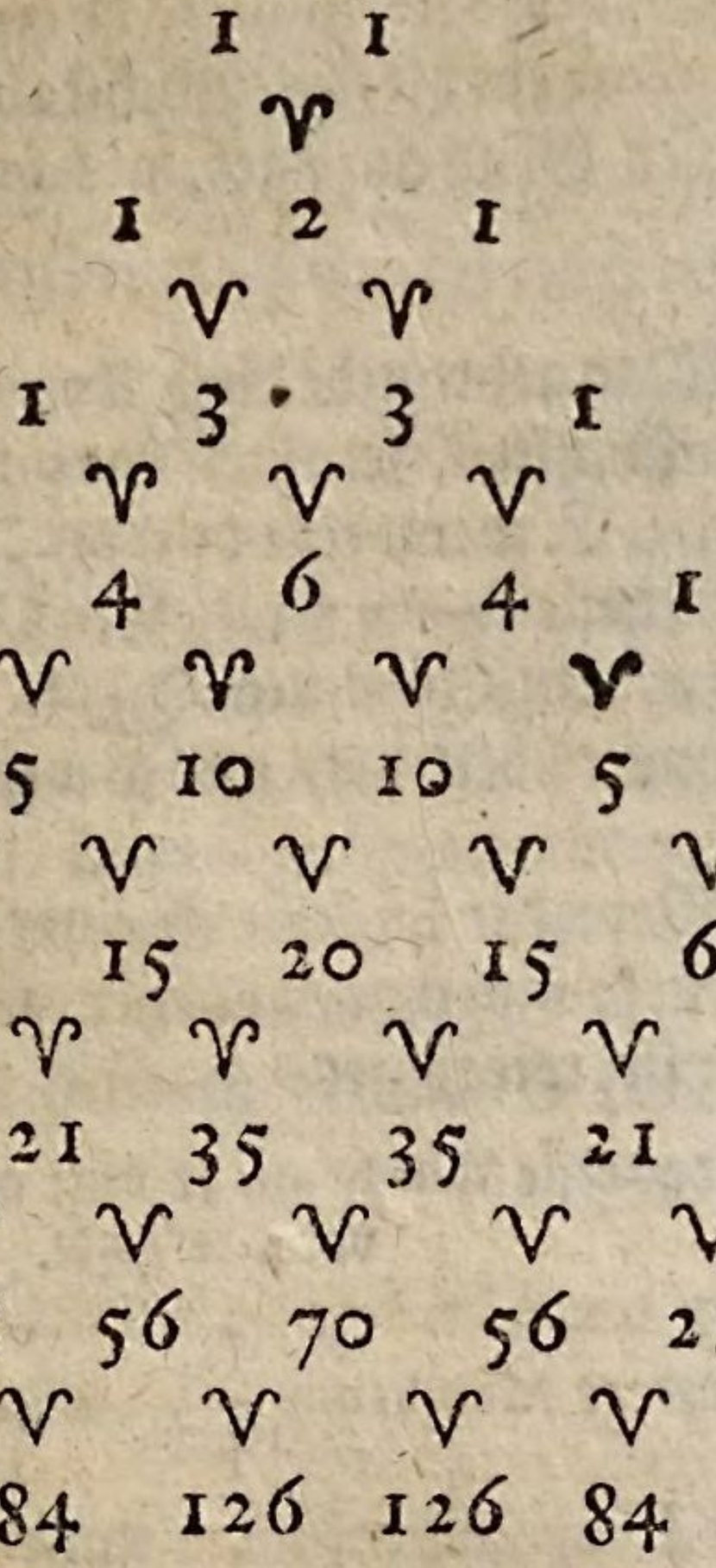
Anmerck. 494. Auch hat der Herr de Lagny angemercket, * daß die II Differentzen der aufeinander folgenden Quadrat-Zahlen allwege = 1.2 = 2. die III Differentzen der natürlichen Cuborum = 1.2.3 = 6. Die IV. Differentzen der also folgenden Quadrato-Quadratorum = 1.2.3.4 = 24 die V. Differentzen der Quadrato-Cuborum = 1.2.3.4.5 = 120, und so weiter, aus deren blossen Addition man auch die Quadrat- und Cubic-Taffeln ꝛc. so gleich construiren kan.

Anmerck. 495. Wenn man eine zweytheilige Wurtzel $a+b$ mit sich selbst, und was heraus kömmt, wieder damit multiplicirt, ꝛc. dabey aber zugleich Achtung giebt, wie offt einerley Productum litterale in Factis partialibus wiederhohlet wird, so wird man finden, daß es nach folgendem Abaco Additionis geschicht, da man nehmlich aus denen 2 oben stehenden Ziffern die mitten darunter stehende dritte allemahl addendo heraus bringt, und ist hieraus die Tabelle der Zehler zu den Potentz-Theilen, (Tabula Coëfficientium, oder Unciarum) erwachsen, die wegen ihres grossen Nutzens in der Combination von einigen auch Tabula Mirifica ** genennet wird.

---

* Vid. Hist. de L'Academ. des Sciences. Mem. 1705. pag. 367. f.

** Vid. Herr Prof. Creilingii Method. de Max. & Minimis pag. 7.



496. Der Herr Newton hat zugleich observiret, daß diese so genannten Unzen aus denen verwechselt untereinander geschriebenen und nach und nach in sich multiplicirten Anfangs-Zahlen zum Vorschein kommen, als die Unciæ der 4ten Dignität sind: Anmerck.

$$\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{4.3.}{1.2.} \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{4.3.2}{1.2.3} \frac{24}{6} = 4$$

$$\frac{4.3.2.1.}{1.2.3.4.} = 1,$$

Nehmlich es ist die Anzahl der untereinander geschriebenen Numerorum naturalium allemahl dem Exponenten der gegebenen Dignität gleich. *

* V. E. Wels Elem. Arith. Num. & Sp. in fine.

Erklär. 497. Eine undeterminirte Potentz heist diejenige, deren Exponente ein blosser Buchstaben ist, und daher keinen gewissen Grad anzeiget, als d^n, kan d^2, d^3, d^4, &c. bedeuten.

Anmerck. 498. Man gebraucht diese Expression, wenn man einige Eigenschafften, so allen Potentzen gemein sind, will vorstellen, z. E. wenn eine Potentz $= d^n$, so ist die Anzahl ihrer Theile $= n + 1$. Ein Quadrat hat 3 Theile, ein Cubus 4. ein Quadrato-Quad. 5 Theile oder Membra, woraus es bestehet, und so weiter.

Anmerck. 499. Wenn der Exponente einer undeterminirten Potentz n ist, so kommen nach vorher gegangnen 496. s. die Unzen vor sie, wie folget:

Vor das erste Membrum kommt allezeit 1 wie auch vor das letzte.

Vor das andere Membrum $\frac{n}{1}$, vor das dritte $\left(\frac{n}{1}\right).\left(\frac{n-1}{2}\right)$

Vor das vierdte $\left(\frac{n}{1}\right).\left(\frac{n-1}{2}\right).\left(\frac{n-2}{3}\right)$ &c.

36. Aufgabe.

36. Aufgabe. 500 Eine Summe $(a + b)$ oder eine Differentz $(a - b)$ von zweyen Grössen (ohne sie in einander zu multiplicirem) auf iede höhere Potentz zu involviren, als hier auf die 6te.

1.) Man setze den ersten Buchstaben mit dem gegebenen und allen folgenden geringern Exponenten nach der Ordnung in einer Reihe etwas weit aus einander:

$$A^6 \quad A^5 \quad A^4 \quad A^3 \quad A^2 \quad A^1$$

2.) Schrei-

2.) Schreibe man vom Ende her den andern Buchstaben mit dem gegebenen Exponenten erst alleine, hernach ihn mit denen folgenden abnehmenden Exponenten rückwärts in der Ordnung an die vorhergesetzten, so kommt:

$a^6 \quad a^5b \quad a^4b^2 \quad a^3b^3 \quad a^2b^4 \quad ab^5 \quad b^6$

3.) Nehme man aus der Tabelle §. 495. die zur 6ten Potentz gefundenen Zehler, 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1 und setze sie vor die letzt geordneten Membra, (jedoch weil 1 nicht multipliciret, kan es anfangs und zuletzt weg bleiben) so fehlen nicht mehr als die Signa, welche im ersten Fall durchaus +, im andern Fall aber abwechselnd, nemlich erst + hernach — und so weiter seyn, Demnach ist

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Und die Differentz solcher 2 Grössen $(a-b)^6 =$

$$a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6abs+b^6.$$

(§. 473. 280.)

501. Und eben auf diese Art setzet man die Membra einer undeterminirten Potentz von $a \pm b$ zusammen, nur daß die Untzen aus dem 499 §. genommen werden, nehmlich anfangs setzet man von oben herunter:

$a^n \quad a^{n-1} \quad a^{n-2} \quad a^{n-3} \quad a^{n-4}$ &c.

Hernach schreibet man vom andern Membro anfangende des andern Theils Potentzen von unten hinauf:

$a^n \quad a^{n-1}b \quad a^{n-2}b^2 \quad a^{n-3}b3 \quad a^{n-4}b4$ &c.

Endlich setzet man noch die Utzen und Signa hinein, wie allbereit gemeldet, so ist z. E. $(a+b)^n =$

$$a^{\underset{1}{n}} + \frac{n}{1}\,a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,a^{n-2}b^{2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,a^{n-3}b^{3}\ \&c.$$

Biß nehmlich in Utzen n minus der letztlich zu subtrahirenden Zahl $=$ 1. (s. 496.)

Anmerck. 502. Diese vielen Buchstaben kan man noch in wenigere contrahiren, um die nachgehende Expression desto leichter zu mercken, nehmlich weil $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$ und $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$ (s. 240.) so sind vorhergehende Membra der undeterminirten Potentz auch $=$

$$a^{\underset{1}{n}} + \frac{n}{1}\,a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,a^{n-2}b^{2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,a^{n-3}b^{3}\ \&c.$$

$$1\ A + 1\ 2\ A^2 + 1\ 2\ 3\ A^3$$

Worinne die Factores der vorhergehenden allwege so gleich auch Factores der folgenden werden, z. E. das dritte Membrum ist $=$ dem andern multiplicirt mit $\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b}{a}$, das vierdte ist $=$ dem dritten multiplicirt mit $\frac{n-2}{3}\cdot\frac{b}{a}$ und so weiter. Dahero so man die völligen Membra, und zwar das erste A, das andere B, das dritte C nennet, und $a = P$, $\frac{b}{n} = Q$ setzet, so ist das erste $A = P^n$, das andere $B = \frac{n}{1}AQ$, das dritte $C = \frac{n-1}{2}BQ$, das vierdte $D = \frac{n-2}{3}CQ$, und so weiter.

LBC

Wor-

Woraus denn die hochnützliche Series Potentiarum Newtoniana * entstehet, da $(P + PQ)^{n:m} =$

$$P^{\frac{n:m}{m}} + AQ^{\frac{n}{2m}} + BQ^{\frac{n-1m}{3m}} + CQ^{\frac{n-2m}{4m}} \text{ &c.}$$

503. Der weit ausschweiffende Gebrauch dieser Ex- Anmerck.
pression wird schon vorkommen, und sey damit vor ietzo nur das 5te Exempel in etwas erkläret, da $d + e$ auf die 5te Potentz soll erhoben werden, allwo $P = d$, $e : d = Q$ $n = 5$ $m = 1$, Wornach denn der Quadrato-Cubus aus folgenden 6 Membris bestehet:

$$A = P^{\frac{n:m}{n}} = d^{\frac{5:1}{5}} = d^5$$

$$B = AQ^{\frac{5}{m}} = \frac{d^5}{1} \cdot \frac{e}{1} \cdot \frac{}{d} = 5d^4e$$

$$C = BQ^{\frac{n-m}{2m}} = \frac{4}{2} \cdot \frac{5d^4e}{1} \cdot \frac{e}{d} = \frac{20d^4e^2}{2d} = 10d^3e^2$$

$$D = CQ^{\frac{n-2m}{3m}} = \frac{3}{3} \cdot \frac{10d^3e^2}{1} \cdot \frac{e}{d} = 10d^2e^3$$

$$E = DQ^{\frac{n-3m}{4m}} = \frac{2}{4} \cdot \frac{10d^2e^3}{1} \cdot \frac{e}{d} = 5de^4$$

$$F = EQ^{\frac{n-4m}{5m}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5de^4}{1} \cdot \frac{e}{d} = \frac{5e^5}{5} = e^5$$

* Davon er in Epist. ad D. Oldenburgium gedacht, und bey seinen Princip. Philos. Nat. Math. in der Analysi per Quantitatum Series mit angebrucket ist, so auch nachgehends der Herr Hof-Rath Wolff im Elem. Math. universæ mit mehrern erläutert hat pag. 267. seq.

Weiter kan man nicht gehen, sintemahln

$$G \overset{n-5m}{=\!=\!=} FQ \overset{0}{=\!=\!=} 0.$$
$$\overset{}{} \qquad\qquad 6m \qquad\qquad 6$$

Erklär. 504. Gleichviel zu- oder abnehmende Zahlen sind diejenige, da die Differentz zweyer vorhergehenden gleich ist der Differentz zweyer folgenden, als 2. 5. 6. 9. oder 3. 7. 11. 15 sind Numeri æqui differentes. Die erste und letzte Zahl heissen Termini extremi, die aber zwischen inne stehen, Termini medii.

Erklär. 505. Wo die Differentz durchgehends zwischen allen neben einander stehenden Terminis einerley ist, werden sie durchaus gleichzu- oder abnehmende Zahlen (continue æqui differentes genennet, und setzet man vor sie 3 Puncte mit einer dazwischen gezogenen Linie, als von ∴ 3. 7. 11. 15. 19. ꝛc. ist durchgehends der Unterscheid 4.

Erklär. 506. Wo aber nur zwischen dem ersten und andern, zwischen dem dritten und vierdten, zwischen dem 5ten und 6ten u. s. w. gleiche Differentzen gefunden werden, da heissen dergleichen Zahlen nur paarweiß gleichzu- oder abnehmende, (Discretim - æquidifferentes,) und setzet man zu ihren Zeichen zwischen iedes Paar 3 Puncte, als 2. 5 ∴ 6. 9. ∴ 8. 11.

Zusatz. 507. Überhaupt: Wenn der Terminus primus $=\!=\!= p$, die Differentz $=\!=\!= d$, so kan man iede durchaus gleichzunehmende Reihe exprimiren mit

$$\therefore p.p+d.p+2d.p+3d \quad \&c.$$

Eine durchaus gleich abnehmende mit

$$\therefore p.p-d.p-2d.p-3d \quad \&c.$$

Eine

Eine paarweiß zunehmende aber mit

$p.p+d \therefore t.t+d \therefore q.q+d$

Und dergleichen abnehmende mit

$p.p-d \therefore t.t-d \therefore q.q-d$ &c.

508. Daferne man über eine durchaus gleichzu- oder abnehmende Reihe Römische Ziffern nach der Ordnung der Stellen, oder wie es einige nennen, Local-Zahlen setzet, so fängt sich die Differentz erst unter der andern an, und unter ieder folgenden Local-Zahl stehet allezeit der erste mit so viel Differentzen weniger eine, als: Anmerck.

I. II. III. IV. V. VI. VII.

$p\ p\overset{+}{=}d\ p\overset{+}{=}2d\ p\overset{+}{=}3d\ p\overset{+}{=}4d\ p\overset{+}{=}5d\ p\overset{+}{=}6d.$

&c.

509. Also ist der hunderste Terminus zu 4. 7. 10. ꝛc. Zusatz.

$= p+99^d = 4+99.3.$

37. Aufgabe.

510. Zu einigen gegebenen continue-æquidifferentibus den letzten Terminum zu finden. 37. Aufgabe.

Z. E. Ein Gewercke bekommt im Bergbau Ausbeute das erste Jahr 12. Thl. hernach alle Jahr 5 Thl. mehr, wie viel bekommt er das 13te Jahr? Fac. 72. Thl.

Man multiplicire den so vielsten Terminum weniger eins, mit der gegebenen Differentz, und addire zum Facto den ersten, so giebt die Summe den letzten.

Als hier $13-1 = 12.\|12.5 = 60\|60+12 = 72.$

Der Beweiß liegt im vorigen §. und so die Termini immer abnehmen, subtrahire man voriges Factum vom ersten, so giebt der Rest den letzten.

Zusatz. §11. Wenn demnach überhaupt der Numerus Terminorum $= n$, der erste $= p$, und die Differentz $= d$ so ist in zunehmenden Reihen

Der letzte $= p + (n-1)d = nd - 1d + p$
Der penultim. $= p + (n-2)d = nd - 2d + p$
Der antepen. $= p + (n-3)d = nd - 3d + p$ &c.
so lange biß n - der folgenden gemeinen Zahl $= 0$.
Dann ist $p + 0d =$ dem ersten, p.
In abnehmenden ist der letzte $= p - (n-1)d$ &c.

Lehrsatz. §12. Von 4 æquidifferentibus ist die Summe der beyden mittelsten gleich der Summe der beyden äussersten Terminorum, als von

$\therefore$ 3. 7. 11. 15 oder
4. 8 $\therefore$ 10. 14

ist beyderseits die Summe der äussersten $= 18$, und die Summe der mittelsten ist auch $= 18$.

Beweiß.

Es sey der Terminus primus $= p$, secundus $= s$, tertius $= t$, quartus $= q$, so ist
$s - p = q - t$ (§. 504.) Hierzu addire man beyderseits $p + t = p + t$

so ist: $s + t = p + q$. (§. 244.)

Lehrsatz. §13. In ieder Reihe æquidifferentium ist die Summe der äussersten Terminorum gleich der Summe ieder zweyen, so von den äussersten gleichweit abstehen, oder (da die Anzahl ungrade,) gleich dem doppelten mittelsten.

Es seyen $\therefore$ a, b, c, d, e, f, g, h &c.
so ist $a.b \therefore g.h$ dezgleichen $b.c \therefore f.g$, wie auch
$c.d \therefore e.f$ (§. 505. 506.)

Das

Dahero $a + b = b + g \,||\, b + g = c + f \,||\, c + f = d + e$.
(§. 512.)

Folglich ist $a + b = b + g = c + f = d + e$ (§. 246.)
Und so ferner $\dot{\div}$ a, b, c, d, e, wo nehmlich die Anzahl der Terminorum ungrade,
so ist $a.b \mathbin{\dot{:}} d.e \,||\, b.c \mathbin{\dot{:}} c.d$, (§. 506.)
Dahero ist $a + e = b + d \,||\, b + d = c + c$ (§. 512.)
und $a + e = b + d = 2c$ (§. 246.)

514. Da nun allemahl 2 Termini auf solche Art zusammen genommen, desgleichen der mittelste doppelt genommen, so viel ausmachen, als der erste und letzte, darff man nur die Summa des ersten und letzten halb so viel mahl nehmen, als Termini sind, so kommt die Summe der gantzen Reihe, als weiln von Zusatz.

I. II. III. IV. V. VI. VII. IIX.
$\dot{\div}$ a, b, c, d, e, f, g, b
$a + b = b + g = c + f = d + e$ (§. 513.) so ist
Die Summe der gantzen Reihe

$$= (a + b) \cdot \frac{\text{IIX}}{\text{II}} = (a + b).4$$

I. II. III. IV. V
Und da auch in $\dot{\div}$ a, b, c, d, e
$a + e = b + d = c + c$ (§. 513.) so ist auch die

$$\text{gantze Summe} = (a + e) \cdot \frac{\text{V}}{\text{II}} = (a + e).2\frac{\text{I}}{\text{2}}$$

38. Aufgabe.

515. Wenn aus einer Serie æquidifferentium der erste, die Differentz, und die Anzahl der Terminorum bekannt, die Summe der gantzen Reihe zu determiniren. 38. Aufgabe

1.) Er-

1.) Erfinde man den letzten Terminum, (§. 510.)

2.) Addire den ersten und letzten zusammen.

3.) Multiplicire man diese Summe mit der halben Anzahl aller Terminorum, so kömmt die Summa aller æquidifferentium. Z. E. In einer Zeit von 50 Tertien fället ein schwehrer Cörper 10 Römische Schuch, in der folgenden Zeit von 50 Tertien fället er 20 Schuch weiter als zuvor, und also immer fort, * wie hoch hat demnach ein Cörper in 5 Secunden und 50 Tertien zufallen?

50 Tertien sind in $5''.50''$ oder in $350'''$. just 7 mahl enthalten, derowegen sind 7 Termini. Der letzte ist $=$ $10 + 6.20 = 130$. (§. 510.) $10 + 130 = 140$.

Und $140.\frac{3}{2} = 420 + 70 = 490$ Römische Schuch, als der gesuchten Höhe.

Anmerck. 516. Wenn solche Series aus denen natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6 &c. bestehet, und n Termini seyn, so ist der letzte $= 1 + (n-1)\,d = 1 + n - 1 = n$ hierzu der erste, kommt $n + 1$, und dieses in die halbe Anzahl aller Terminorum $\frac{n}{2}$ multipl. bringt $\frac{n^2+n}{2}$ vor die Summe so vieler anfänglichen naturalium als man vor die Zahl n nimmt.

Zusatz. 517. Demnach ist die Summe solcher Naturalium allemahl $=$ der so vielsten halben Pronic-Zahl, (§. 477.)

Zusatz. 518. Daß die Expression: $m.m+1.m+2.m+3$ nicht nur Naturales, sondern auch alle æquidifferentes zugleich mit vorstelle, hat Mr. Varignon angemercket, **

* Ricciolus in Almag. Nov. Tom. I. L. II. p. 89.

** Varignon Eclairciſſemens ſur l'Analyſe des Infiniment petits pag. 94. ſeq.

Wenn

Wenn man nehmlich die undeterminirte $m \overset{n}{=\!=\!=} \frac{n}{p}$ set-

zet, da so wohl der Zehler als Nenner auch undetermi-nirt seyn, denn also kommt die Series:

$$\frac{n}{p} \cdot \frac{n}{p} + 1 \cdot \frac{n}{p} + 2 \cdot \frac{n}{p} + 3 \text{ &c.}$$

$$\overset{n}{=\!=\!=} n, n+p, n+2p, n+3p \text{ &c. (§. 353.)}$$

39. Aufgabe.

519. Aus dem blossen ersten Termino, (nehmlich ohne den letzten erst zu finden) der Difference, und dem Numero Terminorum die Summe von ieder Reihe æquidifferentium zu finden. 39. Aufgabe.

1.) Man subtrahire von der Anzahl der Terminorum 1, und des Restes halbe pronic-Zahl multiplicire man mit der Differentz.

2.) Ferner multiplicire man den ersten mit der Anzahl aller Terminorum, und addire dieses Factum zu jenem, so kommt die verlangte Summe. Z. E. Binnen 12 Wochen soll eine grosse Anzahl Waare geliefert werden, nach den ersten 8 Tagen 13 Stück, nach 14 Tagen 20 Stück, und also immer 7 Stück mehr, wie viel wirds in allem betragen?

$11^2 + 11 \overset{n}{=\!=\!=} 132$

$\frac{132}{2} = 66$

$\frac{462}{66} = 7$

$\frac{13}{2} = (12$

$12 \cdot 13 = 156$

$156 + 462 = 618$ Stück.

Fac.

Be-

Beweiß.

Wenn der Terminus primus $=p$, Differentia $=d$ und Num. Term. $=n$, so ist der letzte $=nd-1d+p$

der vorhergehende $=nd-2d+p$

der vor diesen hergehende $=nd-3d+p$

biß $nd-$ so und so viel $d=0$. und also $+p=p$.

(§. 511.)

Demnach sind in dieser Expression so viel nd, als der Numerus Terminorum anzeigt, nehmlich nnd, desgleichen so viel $-d$, als die Summe der Naturalium beträgt, nehmlich $-\frac{(n^2+n)}{2}d$ (§. 517.) und so viel p, als Termini sind, nehmlich np.

Dahero ist iede Summe æquidifferentium überhaupt $=$

$$n^2d+np-\frac{((n^2+n)d)}{2}=$$

$$\frac{2n^2d+2np-n^2d-nd}{2}=$$

$$\frac{n^2d+2np-nd}{2}=\frac{(n^2-n)}{2}d+np$$

(§. 477.)

Erklär. 520. Eine schlechte Viel-Eck-Zahl, (Numerus Polygonalis simplex) ist eine Menge Unitäten (oder Puncte,) mit welchen man eine regulare Figur also besetzen kan, daß gleichviel auf iede Seite, und ihre Abstände mit den Seiten und Uber-Ecklinien parallél kommen. Allerhand deutliche Figuren davon besehe man im Ozanam. *

* Vid Ozanam Dictionaire Mathematique p. 30. f.

521. Die

521. Sie entstehet, wenn man eine von 1 anfangende Seriem æquidifferentium so weit addiret, als man will, und heist die Anzahl der Terminorum die Seite solcher Viel-Eck-Zahl. Z. die æquidifferentes, so auch Gnomones genennt werden: Ursprung.

1 † 2 † 3 † 4 geben eine Trigonal-Zahl
10. deren Seite 4, und die Anzahl der Winckel 3. ist.

1 † 3 † 5 † 7 † 9 geben eine Quadrat-Zahl
25. deren Seite 5, und die Winckel Zahl 4 ist.

1 † 4 † 7 † 10 geben eine Pentagonal-Zahl
22. deren Seite 4 und die Winckel-Zahl 5 ist, ꝛc.

522. Demnach ist die Winckel-Zahl allezeit um 2 mehr als die Differentz der æquidifferentium. Zusatz.

40. Aufgabe.

523. Eine iede Viel-Eck-Zahl zu bestimmen, wenn davon eine Seite und die Zahl der Winckel gegeben. 40. Aufgabe.

Z. E. Es wird gegeben die Seite 7, und daraus soll eine Octogonal-Zahl formirt werden, wie viel hält sie? Fac. 133.

1.) Multiplicire man das Quadrat der Seite mit der Winckel-Zahl - 2.

2.) Multiplicire man die Seite mit der Winckel-Zahl - 4.

3.) Subtrahire man dieses von jenen, und halbire den Rest.

$7^2 = 49$ — 7
294 (6 — 4
294 — 294 - 28 = 266
28 — dessen Helffte = 133.

Be-

Beweiß.

Da iede Summe von Æquidifferentibus $\frac{n^2 d + 2np - nd}{2}$ (§. 519.) so ist iede Series, wo $p = 1$

$$= \frac{n^2 d + 2n - nd}{2} = \frac{d.(n^2) - n.(d-2)}{2}$$

(§. 235.)

So man nun iede Winckel-Zahl w, und iede Seite n nennet, und $w-2$ vor die Differentz d substituiret, kömmt das symbolum einer ieden Polygonal-Zahl =

$$((w-2))n^2 - (n.(w-4)) : 2 \quad (\S. 522.)$$

Zusatz. 524. Woraus denn die Symbola Specialia kommen, und zwar vor

die 3 Eck-Zahlen:	$(n^2 - n) : 2$
4	$(2n^2 - n0) : 2 = n^2$
5	$(3n^2 - n) : 2$
6	$(4n^2 - 2n) : 2 = n^2 - n$
7	$(5n^2 - 3n) : 2$
8	$(6n^2 - 4n) : 2 = 3n - 2n$ ꝛc.

41. Aufgabe.

41. Aufgabe. 525. Die Viel-Eck-Zahlen aus der Summatione Gnomonum zu formiren.

Man subtrahire vom Quadrato Lateris das gegebene Latus, und halbire den Rest. Die Helffte multiplicire man mit der Winckel-Zahl - 2, und addire hierzu das gegebene Latus.

Nach der gegebenen Seite 5 soll ein Hexagonum besetzt werden:

$25 - 5 = 20 | 20 : 2 = 10 | 10.4 = 40 + 5 = 45.$

Beweiß.

Beweiß.

Bey allen Polygonal-Zahlen ist

Der I. Gnomon $\equiv$ 1

Der II. . . . $\equiv$ $1 \dagger (w-2).1$

Der III. . . . . $1 \dagger (w-2).2$

Der IV. . . . . $1 \dagger (w-2).3$ &c. in infin.

(§. 522. 508.)

Uberhaupt: Wenn n von 0 an, ieden Naturalem bedeutet, so ist das Symbolum Gnomonis universalis $\equiv$ $1 \dagger (w-2)n$, und aller Summe $\equiv$ $\int n^0 \dagger (w-2).\int (n-1)^1$

Nun ist die Summe von n Unitäten, oder $\int 1$ oder $\int n^0 \equiv n$, $w-2$ bleibt beständig, und heben sich die Naturales erst beym andern Termino an, daher ist ihre Anzahl $\equiv n-1$ und $\int (n-1)^1 \equiv \frac{n^2-n}{2}$ (§. 477. 517.)

folglich ist auch das Symbolum einer ieden Polygonal-Zahl $\equiv ((w-2).(\frac{n^2-n}{2})) \dagger n$. (§. 521.)

526. Bey grossen Polygonal Zahlen kan man sich der Quadrat-Tafeln mit gutem Nutzen bedienen. Anmerck.

527. Eine Central-Viel-Ecks-Zahl, (Numerus Polygonus centralis) ist eine Menge Unitäten, (oder Puncte) mit welchen man eine regulaire Figur also ausstellen kan, daß gleich viel Puncta auf eine Seite, und ihre Abstände mit denen Seiten und auch mit denen Radiis in gleicher Weite parallél kommen. Erklär.

Unterschiedene Figuren davon besehe man beym Ozan. loc. cit.

Ursp. 528. Sie entstehet, wenn man die Æquidifferentes, so sich wenigstens von 3 anfangen, und allezeit um den ersten Terminum wachsen, (sonsten Perimetri polygonales genannt) addiret, und iederzeit zuletzt noch 1 darzu thut, als:

$$(3+6+9+12)+1$$

giebt eine 3 eckigte Central-Zahl 31, deren Latus 5 ist.

$$(4+8+12+16+20)+1$$

giebt eine 4 eckigte Central-Zahl 61, deren Seite 6.

$$(5+10+15)+1$$

giebt eine 5 eckigte Central-Zahl 31, deren Latus 4 ist, ꝛc.

Zusatz. 529. Wenn demnach die Winckel-Zahl, oder der erste Terminus $= w$ und die Seiten-Zahl $= n+1$, so ist das Symbolum eines ieden Perimetri polygonalis $= wn$, und da w beständig einerley bleibt, ist ieder Polygonus Centralis $= w\int n^1+1$, dessen Latus nehmlich $= n+1$.

42. Aufgabe.

42. Aufgabe. 530. Aus der gegebenen Seite und Winckel-Zahl, einen ieden Numerum polygonum Centralem zu berechen.

1.) Man subtrahire von der Seiten-Zahl 1, multiplicire den Rest mit sich selbst, und addire den Rest.

2.) Die Summe halbire man, und multiplicire die Helffte mit der Winckel-Zahl, endlich addire man iederzeit noch 1.

Z. E. Die Hexagonal-Central-Zahl von der Seite 5 zu finden.

$$4.4 = 16 \mid 16+4 = 20 \mid (10.6)+1 = 61.$$

Be-

Beweiß.

Nach vorigem Zusatz (S. 529.) ist ieder Polyg. Centralis, (dessen Seite $= (n+1) = w$) $\int n^1 + 1$

$\int n^1$, aber ist $= \frac{n^2+n}{2}$ (S. 517.)

Folglich ist ieder Polyg. Centralis

$= \frac{((n^2+n)w))+1}{2}$.

531. Die Ausziehung der Wurtzel, (Extractio Radicis) ist nichts anders, als eine Ausfindung der Seiten-Zahl eines Numeri Figurati, wird sonsten auch Analysis oder Evolutio Potestatum oder Figuratorum genennet: Erklär.

43. Aufgabe.

532. Aus einer gegebenen Zahl die Quadrat-Wurtzel zu extrahiren. 43. Aufgabe.

1.) Man fange von der letzten Ziffer an, (nehmlich von der Rechten gegen die Lincke,) und entscheide die vorgegebene Zahl von zwey zu zwey in Glieder, so weit es gehet.

2.) Vom ersten Gliede schreibe man die nechste Wurtzel als den Quotienten, und subtrahire davon das Quadrat solcher nechsten Wurtzel.

3.) Duplire man den genommenen Quotienten, setze das Dupli letzte Ziffer in Gedancken unter die erste des folgenden Glieds, und die andern so fort in der Ordnung, so weit sie reichen, unter das Residuum des ersten Glieds, dividire mit solchem Duplo in den darüber gekommenen Dividuum, wie gewöhnlich, so kommt der neue Quot, (oder der folgende Theil der Wurtzel.)

4.) Subtrahire man letzlich noch des neuen Quots Quadrat.

5.) So mehr als 2 Glieder sind, Duplire man von neuem den völligen Quotienten, und verfahre wieder, wie von No. 3 an bißher gelehret worden.

Wem es beliebig, der kan hierzu folgenden versum Memorialem mercken.

Entscheidet zwey und zwey. Vom ersten Gliede schreibt
Die nechste Wurtzel. Merckt, was vom Quadrate bleibt.
Duplirt den Quotient, und damit dividiret.
Des neuen Quots-Quadrat zieht ab. Aufs neu dupliret. *

Ein Bau-Herr hat 1296 feine vier Eckigte Platten, will damit einen Saal en carré belegen lassen, wie viel werden derselben auf eine Seite kommen? Fac. 36.

	12 | 96	(36.
6)	3 | 3	

Ein grosses Quadrat-Feld hält 23716 gevierdte Ruthen, wie lang ist eine Seite von solchem Feld? Fac. 154. Ruthen.

	2 | 37	156	(154.
2)	1 | 12		
30)			

Beweiß.

Von einer zweytheiligen Wurtzel $a + b$ ist das Quadrat $= a^2 \mid + 2ab + bb$ (§. 479.)
$\quad\ Ein Bau-Herr hat 1296 feine vier Eckigte Platten, will damit einen Saal en carré belegen lassen, wie viel werden derselben auf eine Seite kommen? Fac. 36.

	12 | 96	(36.
6)	3 | 3	

Ein grosses Quadrat-Feld hält 23716 gevierdte Ruthen, wie lang ist eine Seite von solchem Feld? Fac. 154. Ruthen.

	2 | 37	156	(154.
2)	1 | 12		
30)			

Beweiß.

Von einer zweytheiligen Wurtzel $a + b$ ist das Quadrat $= a^2 \mid + 2ab + bb$ (§. 479.)

Setzet man nun vom ersten Quadrat a^2 die Wurtzel a als Quotienten, und dividiret mit deren Duplo $2a$ in das

das folgende, kommt der andere Theil der Wurtzel *b*. Dieser und des Divisoris Factum (2 *a b*) subtrahiret man von 2 *a b*, geht auf: Endlich multipliciret man *b* noch mit sich selbst, thut *bb*, von *b b* geht auf.

533. Hat die Wurtzel mehr als 2 Theile, so kan man 2 oder mehr davon vor einen nehmen, und alsdenn eben so wie vorhin verfahren, als aus Zus.

ist Rad.

$$a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2 \ (a+b-c$$

$2a+2b$)

Oder so man die Theile solches Quadrats anders ordnet, so ist aus

Radix auch

$$c^2-2bc-2ac+b^2+2ab+a^2 \ (c-b-a$$

$2c-2b$)

Denn da so wohl + in +, als - in - ein Quadratum affirmativum bringt, (§. 280.) so kan a^2 auch aus $-a$ in $-a$ entstanden seyn, und da diverse Signa allezeit - machen, (§. 232.) so müssen deswegen *b* und *c*, desgleichen auch *a* und *c* unterschiedene Signa gehabt haben, weshalber denn beydes rechte Radices aus dem vorgegebenen Quadrate seyn können.

534. Zuweilen evanesciren etliche Theile in der Quadratischen Multiplication, welche iedennoch in der Extraction wieder müssen zum Vorschein kommen, als aus Anmerck.

ist Radix

$$a^4-2a^3b-a^2b^2+2ab^3+b^4 \ (a^2-ab-b^2$$

$2a^2)$ $\quad -2a^2b^2$

$2a^2-2ab)$

Oder auch eben auf diese Art findet man die andere Radicem b^2+ab-a^2, wenn man nehmlich das Quadrat b^4 erst nimmt, und also auch in andern.

Zusatz. §35. In Brüchen muß man so wohl aus dem Zehler, als aus dem Renner radicem extrahiren, z. E. aus

$\frac{49}{100}$ ist rad. qv. $\frac{7}{10}$ aus $\frac{y^2}{a^2 - ab + b^2}$ ist rad. $\frac{y}{a-b}$

(§. 483.)

Vortheil. 536. Aus grossen Zahlen läst sich die Radix vermittelst der Quadrat-Tafeln um ein gutes leichter finden, wenn man so gleich das nechste kleinere Quadrat von den ersten drey Gliedern in Tabb. aufsuchet, dessen Wurtzel von 3 Ziffern auf einmahl in Quotienten setzet, und alsdenn nach der Regula Extractionis (§. 533.) von No. 3 an de novo dupliret, als aus

ist Rad.

91 | 65 | 65 | 95 | 84 (957 | 48
91 | 5.8 | 4.9 |

918

1914) 5.54396

125317

19148) 73

In Job. Ludolphi Tetragonometrie findet man diese Radicem alsbald durchs aufschlagen.

Anmerck. 537. Aus welchen Zahlen oder Buchstaben keine exacte Radix kan ausgezogen werden, die bemercket man nur mit einem *R* oder $\sqrt{}$ (so Signum Radicale genannt wird) als $\sqrt{aab}$ bedeutet die Quadrat-Wurtzel aus aab. $\sqrt[3]{}ccd$ zeiget, daß aus ccd die Cubic-Wurtzel zu nehmen sey. $m\sqrt{}y$ will andeuten, daß man aus y radicem quadratam extrahiret, und sie mit m multipliciret habe, und sagt man y stehe unter, und m auffer dem Zeichen.

538.

538. Wenn man aus 3 oder 300 Rad. quadr. ziemlich genau will heraus ziehen, kan man in Ermangelung grosser Tabellen auch Wallisii Compendium gebrauchen.* Nehmlich man setzet unterschiedliche paar Nullen hinan, und extrahiret nach dem 532 §. endlich so man mit dem grösten Duplo unter das letzte Glied gekommen, dividiret wieder mit den vorigen Duplis in die letzten Dividuos, so weit es will zu reichen, auf diese Art findet man $\sqrt{3}$ bey nahe $= 1\frac{7330508}{}$. Vortheil.

1 1 2 2

1 1 2 3 7 3.

2	61	81	86	75
3	00	00	00	00 (17320508
	2			
	3	4		
	34	6		
	3	46	4	
		34	6	
		3	4	
			3	

539. So nach geschehener Extraction in gantzen Zahlen nicht alles aufgehet, so ist die gegebene Zahl ein unvollkommen Quadrat, und kan niemahls eine exacte Radix daraus gezogen werden. Denn so $\frac{b}{} < c$, setze man Lehrsatz.

die völlige Radix wäre $= a\frac{b}{c}$, so wäre ihr Quadrat $= a^2 + 2\frac{ab}{c} + (\frac{b}{c}.\frac{b}{c})$ (§. 479.) Ein Bruch aber mit einen Bruch multiplicirt, ist iederzeit weniger, als

* Vid. Wallisii Treatise of Algebra pag. 29.

eine Unität (§. 96.) und bleibt also immerdar ein Bruch, (§. 12.) Folglich wird dieses Quadrat mit dem Bruch niemahls einer gantzen Zahl gleich (§. 10.) und daher kan auch die völlige Radix nicht $a\frac{b}{c}$ oder eine gantze Zahl mit einem Bruch seyn. (§. 473.) Und dieses ist auch bey den Extractionen aus denen übrigen Potentzen also zu verstehen.

44. Aufgabe.

44. Aufgabe.

540. Ein unvollkommen Quadrat zu ergäntzen.

Man addire zur doppelten Radice die Unität, und subtrahire von der Summe dasjenige, so überblieben, so giebt der neue Rest das Complement zum folgenden Quadrat. Z. E. 7632.

Man siehet gleich, daß es ein unvollkommner Quadrat, weil es in 2 ausgeht (§. 484.)

```
76 | 32 (87
72 | 13
 4 | 6
16)  3
     175 dopp. rad. + 1
     ---
Hiervon 63 subtr. rest. 112
                        ---
                        add.
kommt das vollk. □ 7744, dessen Wurtzel 88 ist.
```

Beweiß.

Es sey ein unvollkommen Quadrat $= a^2 + b$, so ist rad. $= a$ und restiret b, dieses von $2a + 1$ subtr. läst $2a + 1 - b$ hierzu das unvollkomene Quadrat add.

$$\frac{a^2 + b}{a^2 + 2a + 1}$$

giebt vor das folgende Quadrat, dessen Wurtzel $= a + 1$ (§. 479.)

541.

541. Auch siehet man hieraus, daß nach geschehener Zusatz.
Extraction nicht mehr, als höchstens die doppelte Wurtzel kan übrig bleiben.

542. So kan man auch das unvollkommene Quadrat Zusatz.
$x^2 + ax$ ergäntzen, wenn man noch das Quadrat von
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}a$, das ist: $\frac{1}{4}aa$ darzu thut. Denn also ist die völ-
$\frac{1}{2}$
lige Radix davon $= x + \frac{1}{2}a$. (§. 479.)

543. Auf gleiche Weise ergäntzet man auch das un- Zusatz.
vollkommene Quadrat $n^2 + 1n$, nehmlich eine Pronic-Zahl, (§. 477.) Wenn man noch das Quadrat von
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$, das ist $\frac{1}{4}$ darzu thut, sintemahln $\sqrt{n^2 + 1n + \frac{1}{4}} =$
$\frac{1}{2}$
$n + \frac{1}{2}$ (§. 532.)

544. Dahero kan man aus ieder Pronic-Zahl die Zusatz.
$\frac{1}{4}$
Wurtzel gar leichtlich ziehen, wenn man $\frac{1}{4}$ addiret, rad.
$\frac{1}{2}$
quadr. extrahiret, und letzlich von der gefundenen Radice
noch $\frac{1}{2}$ subtrahiret, als aus 72 die Pronic-Wurtzel zu
$\frac{1}{4}$ $\frac{289}{4}$
bekommen, addire man $\frac{1}{4}$, werden $\frac{289}{4}$ davon rad.
$\frac{17}{2}$ $\frac{16}{2}$ $\frac{4}{2}$
quadr. $= \frac{17}{2}$ — Rest $\frac{16}{2}$ — $= \frac{4}{2}$ 8.

545. Weil eine iede Trigonal-Zahl eine halbe Pronic- Zusatz.
Zahl ist, (§. 521. 517.) so darff man nur iede 3 Eck-Zahl dupliren, und daraus Radicem pronicam extrahiren, so giebt sie die Trigonal-Wurtzel, oder welches gleichviel,

die Anzahl so vieler Naturalium, als zu einer gegebenen Summe gehören.

Anmerck. 546. Daß die Quadrat-Zahlen und ihre Tabellen auch einigen Nutzen in der gemeinen Multiplication haben, zeiget Job. Ludolphus, ehemahliger Prof. Mathes. in Erfurth * in folgender

45. Aufgabe.

45. Aufgabe. Die grössern Zahlen vermittelst der Quadrat-Tafeln in einander zu multipliciren.

Man addire beyde Factores, halbire die Summe, und schreibe aus den Tabb. solcher Helffte Quadrat.

Hernach subtrahire man den kleinern Factorem von obiger halben Summa, und schreibe aus den Tabb. der Differentz Quadrat unter voriges.

Endlich subtrahire man diese zwey Quadrata von einander, so giebt der Rest das gesuchte Product. Z. E. Man multiplicire

72314
mit 35246

107560
2)

53780 □ 2892288400

18534 □ 343509156

Fac. 2548779244

* V. Job. Ludolphi Tetragonometria pag. 48. seqv.

Be-

Beweiß.

Es seyen die 2 Factores a und b,

so ist $\frac{(\frac{a+b}{2})^2}{} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$ (§. 483.)

$\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a-b}{2}$ deren Quadrat ist $\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$ dieses von

obigen subtrahirt, läst $\frac{4ab}{4} = ab$.

(§. 360.)

46. Aufgabe.

46. Aufgabe.

547. Zu finden, ob eine ungrade schwehrtheilige Zahl einige Factores hat, oder ob sie eine Prim-Zahl ist?

Hiervon ist schon oben im 397 §. gedacht worden, und gehört dieses Problema auch mit zur Nutzung der Quadrat-Tuffeln:

Man subtrahire die vorgegebene Zahl, (so sie nicht selbst eine Quadrat-Zahl ist,) von denen nechstfolgenden grössern Quadraten, so lange biß der Rest ein vollkommen Quadrat, so giebt des grössern Wurtzel + des kleinern Wurtzel den grössern Factorem, und des grössern Wurtzel -- des kleinern Wurtzel, den kleinern Factorem.

Ist aber des grössern Wurtzel - des kleinern Wurtzel $= 1$, so ist die vorgegebene Zahl eine Prim-Zahl. (§. 288.)

Z. E.

Z. E. Man sehe, ob 1961 Factores hat?

das gröſſere □ = 2025 dessen Rad. = 45 = 45

fuder. komt ein vollk. □. 64 dessen Rad. = ±8 und -8

Demnach sind die Factores = 53 und 37

Desgleichen probire man die Zahl

779

das nechst gröſſere □ 784

Diff. 5

das folgende: 841

Diff. 62

das folgende: 900 dessen Rad. 30 = 30

komt 1 vollkomen □ 121 dessen Rad. 11 = 11

Folglich sind die Factores davon 41 und 19

Beweiß.

Es sey die Summe der gesuchten Factorum = $2x$
und ihre Differentz = $2y$,
so ist der gröſſere = $x+y$
und der kleinere = $x-y$ (§. 262.)

und ihr Factum = x^2-y^2. (§. 235.)

Demnach ist x^2-y^2 = der vorgegebenen Zahl.
(§. 263.)

Subtrahiret man nun die gegebene Zahl von einem gröſſern Quadrat x^2, und ist der Rest ein kleiner Quadrat y^2, so geben beyder Wurtzeln $x+y$ und $x-y$ die beyden Factores wie zuvor.

548. So man siehet, daß sich eine Differentz in 2. 3. 7 oder 8 endigen wird, lässet man solch grösser Quadrat so gleich hinweg, und nimmt das folgende, (§. 484.) Als weil im letzten Exempel 9 von 11, 2 restiret, kan man das Quadrat 841 stracks übergehen, welches auch ein nöthiges Compendium in dieser Operation ist. Vortheil

549. Sonsten haben schon der Herr von Leibnitz und der Herr Brunet angemercket, daß alle Prim-Zahlen, (so über 5) wenn man 1 oder 5 davon subtrahiret, mit 6 divisibel seyn, das ist, die vorhergehende oder die darauf folgende grade Zahl muß kein ander Collect haben, als das mit 3 divisibel ist, (§. 396. 6.) Auch kan also das Collect einer Prim-Zahl niemahls mit 3 aufgehoben werden, und können sich die Prim-Zahlen nur in 1, 3. 7. oder 9 endigen. (§ 396.) * Anmerck.

47. Aufgabe.

550. Aus einer gegebenen Zahl die Cubic-Wurtzel zu extrahiren. 47. Aufgabe.

1.) Fange man von der Rechten gegen die Lincke an, und entscheide die vorgegebene Zahl, so weit es reichen will, zu drey und drey in Glieder.

2.) Vom ersten Gliede schreibe man die nechste Wurtzel in Quocienten, und subtrahire von solchem Glied ihren Cubum.

3.) Den gefundenen Quocienten, desgleichen sein Quadrat setze man Lincker hand bey Seite, triplire beyde, und schreibe zum Triplis der Ordnung wegen eine Unität.

4.) Setze man in Gedancken das grössere Triplum mit seiner letzten Ziffer unter die erste Zahl des folgenden Glieds, und dividire damit in den so weit erreichten Dividuum, wie gewöhnlich, so kommt der neue Quot.

* Journal des Sçavans. 1678. pag. 390.

5.) Schrei-

5.) Schreibe man des neuen Quots-Gehalt, wie auch sein Quadrat, und seinen Cubum von forne her unter die vorher gesetzte Tripla und Unität, multiplicire mit ieden was oben stehet, und subtrahire die drey Facta nach der Reihe, wie sonst.

6.) Sind mehr als zwey Glieder, so nehme man den gantzen Quotienten, und verfahre wieder damit, wie von No. 3 an gemeldet.

Wem er anstehet, kan folgenden Gedächtnis-Reim davon behalten:

Entscheidet 3 und 3. Vom ersten Gliede schreibt
Die nechste Wurtzel. Merckt, was von dem Cubo bleibt,
Den Quot und sein Quadrat setzt lincks, und sie tripliret,
Zum Triplis schreibet Eins. Mit grösserm dividiret.
Des neuen Quots Gehalt, Quadrat und Würffel-Zahl
Setzt ab. Was drüber mehrt. Zieht ab dis allzumahl.

Z. E. Einer hat 12167 würflichte Steine, will daraus einen grossen Cubum formiren, wie viel müssen auf eine Seite kommen? Fac. 23.

12 | 167 (23.
1 1 | 1 1 1
4 | 52
1 1

4 2 (3
12 6 1
3 9 27
36 54 27

Nehmlich die nechste Wurtzel aus 12, ist 2, ihr Cubus 8 davon abgezogen, bleibt 4. Der Quot und sein Quadrat (2 und 4) triplirt, bringen 12, 6 und hierzu schreibet man 1.

Mit

Mit dem gröſſern Triplo (12) dividirt man in 41, kommt der neue Quot 3. Deſſen Gehalt, Quadrat- und Cubic-Zahl (3. 9. 27) ſetzet man unter, und multiplicirt damit was drüber ſtehet, kömmmt 36, 54 und 27. Die Facta werden nach der Reihe abgezogen, 36 von 41 läſt 5, 54 von 56 läſt 2, und 27 von 27 geht auf.

Wäre nun noch ein Glied in der vorgegebenen Zahl übrig, ſo ſetzte man 23 und das Quadrat davon lincker Hand bey ſeite, und triplirte von neuem wie zuvor, u. ſ. w.

Beweiß.

$$a^3 \mid +3aab+3abb+b^3 \;(a+b$$
$$1 \mid \;\;11\;\;11\;\;\;\;111\;\;111\;\;\;\;1$$

Der Quot und ſein Quadrat;

$$a^2 \quad a$$
$$\overline{\qquad\qquad}\;(;$$

Tripla: $3a^2 \quad 3a \quad 1$
$b \quad b^2 \quad b^3$ aufeinander folgende Potenzen von b.

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$3a^2b+3ab^2+b^3$$

Die drey Facta. (§. 490. 531.)

551. Aus groſſen Zahlen laſſen ſich durch Hülffe der Cubic-Taffeln (ſo biß 1000 gehen,) ſo gleich 3 Ziffern der Radicis auf einmahl finden, und mit dieſem gefundenen Quotienten procedire man wieder von No. 3 anfangende ꝛc. Anmerck.

552. Oder man kan auch des Herrn de Lagny Manier gebrauchen, * da nur die Wurtzel von zweyen Ziffern aufgeſchlagen, der nechſt wenigere Cubus abgezogen, und die Differentz zum Triplo dieſes Cubi addirt wird, ſo kömmt ein beſonderer Diviſor. Dann multipliciret man die geſetzten 2 Quots-Ziffern mit der Differentz, addiret Anmerck.

* V. Method. de Mr. de Lagny pour l' approximation des Racines Cubiques, Journ. des Sçav. 1691. p. 297. ſ.

zum

zum Facto so viel Nullen, als noch Glieder übrig, und dividiret dieses mit dem vorhin gefundenen besondern Divisore, so kommen die übrigen Ziffern, die man zur Wurtzel noch muß hinan schreiben.

ist Rad. Cub.

Z. E. Aus	959	985	256	734	003	(98	647
Cub. Min.	=	941	192							

Differ. 18793

2842369)

Der besondere Divisor.

150344
169137

18417I4000 (647
/ // /// //// /

667538647
/ / /// /

13639222
/// /// /

5421085
// //// /

226087
// / //

85973
/ //// /

29132
///

701

Zusatz. 553. Von der Radice r ist der Cubus $= r^3$ und von der Radice $r + 1$ ist der Cubus $= r^3 + 3r^2 + 3r + 1$ (§. 490.) Daher ist der folgende grössere Cubus allezeit um das 3 fache Quadrat, und die 3 fache Wurtzel + 1 grösser, als der vorhergehende. Folglich kan nach geschehener Extraction aufs höchste nicht mehr, als die 3 fache Pronic-Zahl der gefundenen Wurtzel überbleiben. (§. 477.)

554

554. Weil auch die vorige Differentz $= r^2 + 2r + 1$ Anmerck. $+ 2r^2 + r$ und $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2$ (§. 479.) so differiren auch zwey auf einander folgende Cubi um das Quadrat des gröſſern, um das doppelte Quadrat des kleinern, und um die kleinere Wurtzel, demnach kan man vermittelst der Quadrat-Taffeln die Cubic-Taffeln bloß addendo continuiren.

555. Es hat auch der Herr de la Hire observiret,* Anmerck. daß die Differentz zweyer Cuborum mit 6 dividirt, und der Rest zu des kleinern Wurtzel addirt, die Wurtzel des gröſſern Cubi gebe, wenn sie kleiner ist, als 6 + des kleinern Wurtzel: Oder in dem man noch 6 oder ein Multiplum von 6 dazu thut, wenn sie gröſſer ist. Z. E. Wann 3375 ein vollkommener Cubus, subtrahiret man davon:

1000

bleibt 237 (5 (395

divid. mit 6) 53

Dessen Rad. 10

+ 5

15

Als der Cubic-Wurtzel von 3375.

Hätte man nach Belieben, einen kleinern Cubum, als z. E. 512 von 3375 subtrahirt, und die Differentz 2863 mit 6 dividirt, restirete 1, dis zur kleinern Wurtzel 8 macht 9, ist aber noch zu wenig, derowegen thut man noch 6 dazu, kommt auch 15. Den Beweiß und mehr dergleichen Propositiones findet man am angezogenen Ort, allwo auch angemercket wird, daß alle Cubic-Reste nach der Division mit 6 + einem Simplo oder Multiplo von 6 die Wurtzel des dividirten Cubi müssen zum Vorschein brin-

* Memoires de l' Academ. Royal. des Sciences 1704. pag. 477.

gen. Denn es ist eben so viel, als wenn man (von der Wurtzel o) den Cubum o aus der gegebenen Cubic-Zahl subtrahiret hätte.

48. Aufgabe.

556. Einen unvollkommenen Cubum zu ergäntzen.

Man triplire die gefundene Wurtzel, desgleichen ihr Quadrat, und subtrahire von deren Summe das gebliebene Residuum ÷ 1, so giebt der Rest das Complement zum folgenden Cubo, dessen Radix nehmlich um 1 grösser ist, als die extrahirte. Z. E. Aus dem unvollkommenen Cubo: 12453 ist Rad. Cub. 23, und das Residuum 286. Das 3 fache Quadrat von 23 ist 1587 und die 3 fache Wurtzel 69, thut zusammen 1656, (oder kürtzer:

Die 3 fache Pronic-Zahl von 23 ist	1656
hiervon das Resid. - 1.	285
restiret das Complement:	1371
Hierzu die gegebene Zahl:	12453
giebt den völligen Cubum von 24 =	13824.

Beweiß.

Es sey der unvollkommene Cubus = $a^3 + b$

so ist die Rad. a und das Resid. b. und die 3 fache Pronic-Zahl der Wurtzel = $3a^2 + 3a$

hiervon subtr. $b - 1$

Rest: $3a^2 + 3a - b + 1$

Hierzu der unvollkommene Cub. $a^3 + b$

kömmt: $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

Dessen Radix = $a + 1$ (S. 490.)

49. Auf-

49. Aufgabe.

557. Die Wurtzeln aus denen höhern Potentzen zu extrahiren. 49. Aufgabe.

Man analysire ihre Theile in eben der Ordnung wie oben in dem Beweiß der Cubischen Extraction §. 550. geschehen, so wird man von sich selbsten die auf einander folgende Reguln zu denen höhern Ausziehungen finden. Z. E. So man aus

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \;(a+b$$

Radicem Quadrato-Quadratam verlanget, so setze man die niedrigen Potentzen des ersten Theils der Wurtzel bey Seite, multiplicire sie mit mit denen dazu gehörigen Zehlern oder Untzen, und henge wie der die Unität an. Dann dividire man mit dem ersten Multiplo, (als hier mit $4a^3$) und setze vom andern Theil der Wurtzel (b) alle aufeinander folgende Potentzen darunter, multiplicire was drüber stehet, und ziehe es nach einander ab. Z. E. Hier setze man

$$\begin{array}{cccc} a^3 & a^2 & a & \\ \hline 4a^3 & +6a^2 & +4a & +1 \;(4+6+4+1 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ \hline \end{array}$$

kömmt der gantze Abzug: $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Und also mit substituirten Ziffern auch in andern Potestäten.

558. Wo sich der Exponente einer Potestät mit 2 oder 3 aufheben läst, da kan man auch durch wiederhohlte Extraction der Quadrat- oder Cubic-Wurtzel die höhere Radicem herausbekommen, wie P. Lamy angemercket, * Sintemahl $b^4 = b^2 . b^2$. Desgleichen $n^8 = n^4 . n^4$ Wortheil.

* Vid. Bern. Lamy Elemens des Mathemat. Liv. II. Sect. III. c. 5.

und $n^{12} = n^6 . n^6$ oder $n^4 . n^4 . n^4$ (§. 235.) Also findet man die Quadr. Quadrat-Wurtzel aus 104976 durch 2 mahlige Extraction gar leichte:

		10	49	76	(3	24	(18.
		′ ′	′′	′′	′	′′	
6)		1	25	1	2	6	
		′	′′	′	′	′	
64)		1					
		′					
		2)					

50. Aufgabe.

50. Aufgabe.

559. Aus der gegebenen Summe von einer Reihe Æquidifferentium, wie auch dem ersten Termino und der Differentz, den letzten Terminum zu finden.

1.) Subtrahire man die Differentz vom doppelten ersten, (oder diesen von jener,) multiplicire das Residuum mit sich selbst, so kommt ein Quadrat.

2.) Multiplicire man mit der 8fachen Differentz die Summe der Æquidifferentium, und addire hierzu vorriges Quadrat.

3.) Aus diesem Aggregato extrahire man Radicem Quadratam, subtrahire hiervon die Differentz, und halbire den Rest, so giebt die Helffte den letzten Terminum.

Z. E. Es wird ein Brunnen gegraben viele Lachtern tieff, die erste Lachter kostet 12 Gr. die folgende allemahl 8 Gr. mehr, die gantze Tieffe aber kostet zusammen $32\frac{1}{2}$ Thl. wie hoch kömmt die letzte oder tiefeste Lachter zu stehen? Fac. 108 Gr. oder $4\frac{1}{2}$ Thl.

Die

Die Differentz vom doppelten ersten Subtr. = 16

deren Quadrat = 256

$32\frac{1}{2}$ Thl. = 780 Gr. diese multipl. mit 64 = 49920

50176

Hieraus Rad. Quadr. = 224

. 8 subtr.

Halb. 216

Fac. 108 Gr.

Beweiß.

Weil iede Summe aller æquidifferentium überhaupt =

$$\frac{n^2 d + 2np - nd}{2}$$ (§. 519. in fine.)

nnd der letzte Terminus iederzeit = $nd - 1d + p$ (§. 511.) so kan auch in genere bewiesen werden, daß durch vorige Operation allemahl solcher letzte heraus kömmt, denn wenn der erste = p und die Differentz = d, so ist das Quadrat von $d - 2p$ (oder welches eins) von $2p - d = d^2 - 4pd + 4p^2$ (§. 533.)

Das Factum aus der 8fachen Difference ($8d$) in die Summe ist

$$= \frac{8n^2d^2 + 16npd - 8nd^2}{2}$$

$$4n^2d^2 + 8npd - 4nd^2$$

Hierzu addire man das vorige Quadrat, kommt das Aggregat:

$$4n^2d^2 + 8npd - 4nd^2 + d^2 - 4pd + 4p^2.$$

Hieraus Radix Quadrata $= 2nd - d + 2p$ (§. 532.)
hiervon subtr. d

Restiret: $2nd - 2d + 2p$, davon

die Helffte genommen giebt: $nd - 1d + p$. nehmlich den letzten Terminum.

51. Aufgabe.

51. Aufgabe.

560. Wenn aus einer Serie æquidifferentium der erste, die Differentz, und die Summe bekannt, die Anzahl aller Terminorum zu finden.

1.) Erfinde man den letzten, nach voriger Augabe.

2.) Addire hierzu den ersten, und mit dem Aggregat dividire man in die Summe der gegebenen Reihe, so kömmt die halbe Anzahl aller Terminorum. Oder man dividire dem halben Aggregat, so kommt der gantze Numerus Terminorum.

Als so man wissen wolte, wie tieff voriger Brunnen gewesen, addiret man den letzten

108
und ersten 12

kommt das Aggreg. 120

2) 60) 780 (Fac. 13.
111
1 Lachtern.
1

Beweiß.

So man das Symbolum generale von allen dergleichen Summen, (§. 519. in fin.) nehmlich $(n^2d + 2np - nd) : 2$ mit dem allgemeinem halben Aggregat des ersten und letzten, nehmlich mit $(nd - d + 2p) : 2$ dividiret, kommt n, welches eben der Numerus aller Terminorum ist.

561.

561. Und hieraus flieſſet eine in Figürlichen Zahlen höchſt nötbige

52. Aufgabe.

Aus einer ſimplen Polygonal-Zahl, deren Winckel-Zahl und Inhalt gegeben, Radicem Polygonalem zu extrahiren.

1.) Man nehme die (Winckel-Zahl - 2) achtfach, multiplicire damit die Polygonal-Zahl, und addire hierzu das Quadrat (der Winckel-Zahl - 4.)

2.) Aus dem Aggregat extrahire man Radicem Quadratam, ſubtrahire hiervon die (Winckel-Zahl - 2) und halbire den Reſt, ſo kömmt der letzte Gnomon Polygonalis. (§. 559.)

3.) Hierzu addire man 1, und mit der Helffte dividire man in den gegebenen Polygonum, ſo kommt deſſen Seite.

Z. E. Aus 276 ſoll man die ſimple Hexagonal-Wurtzel ziehen.

Iſt alſo der letzte Gnomon Polygonalis = 45

276 (4
1104 (8
8832
4
88 | 36 (94
11 | 11
18) 71 4
1 1
3 90
1
2) 45.

1
46
2)
23)

276 (12 Radix Hexagonalis.
111
4
1

Beweiß.

Der letzte Gnomon jeder ſimplen Polygonal-Zahl P iſt =

$$\frac{\sqrt{8dP + (d-2)^2} - d}{2}$$ §. 523. und 561.

So man nun vor d, (nehmlich vor die Differentz,) $w-2$, und vor $d-2$, die Winckel-Zahl - 4 substituiret, (§. 522.) kömt gleicher Gestalt der letzte Gnomon. Addiret man zu diesem den ersten, 1, und dividiret mit der halben Summe in den gegebenen Polygonum, so kommt die Anzahl aller Gnomonum oder Terminorum, (§. 560.) oder welches einerley das Latus Polygoni. (§. 521.)

53. Aufgabe.

53. Aufgabe.

562. Aus einer gegebenen Polygonal- Central-Zahl die Wurtzel oder Seite zu finden.

1.) Multiplicire man die Winckel-Zahl mit sich selbst, so kommt ein Quadrat.

2.) Mit der 8 fachen Winckel-Zahl multiplicire man die (gegebene Polygonal-Central-Zahl $\div$ 1) und addire voriges Quadrat.

3.) Aus diesem Aggregat extrahire man Radicem Quadratam, subtrahire die Winckel-Zahl, und halbire den Rest, so giebt die Helffte den letzten Perimetrum polygonalem.

4.) Hierzu addire man die Winckel-Zahl, und mit der halben Summe dividire man in (die gegebene Polyg. Central-Zahl - 1) so giebt der Quotus $+$ 1 die verlangte Seite.

Z. E. Man soll aus der Pentag: Centr. Zahl 31 die Seite berechnen.

$5^2 = 25. \mid 40 . 30 = 1200 \mid 1200 + 25$ oder 1225
giebt die Quadrat-Wurtzel $35. \mid 35 - 5 = 30 \mid 15.$
Perim. Polyg. $15 + 5 = 20. \mid 10) 30 (3 \mid\mid 3 + 1 = 4.$
vor die gesuchte Seite.

Der Beweiß folget aus dem 527. - 528 s. wie auch dem 559 und 560.

563.

563. Man kan auch sogleich den gefundenen Peri- Zusatz.
metrum polygonalem mit der Winckel-Zahl dividiren, und 1 addiren. (§. 529.)

564. Ein Numerus altero latere longior ist eine ab- Erklär.
lange Flächen-Zahl, deren eine Seite länger ist als die andere. (§. 59.) Als 15 ist dergleichen Flächen-Zahl, deren Seiten 3 und 5 sind.

54. Aufgabe.

565. Aus einer ablangen Flächen-Zahl die Seiten zu finden, wenn deren Differentz gegben. 54. Aufgabe.

Man addire das Quadrat der halben Differentz zur gegebenen Zahl, extrahire Radicem Quadratam, so giebt sie + der halben Differentz die lange, und — der halben Differentz, die kurtze Seite. Z. E. Der ablangen Zahl 112 verlangte Seiten differiren um 6, wie lang ist jede?

$112+9 = 121$, deren Radix $11+3$ giebt die lange Seite 14,

und $11-3$ die kurtze 8. Nehmlich $8.14 = 112$.

Beweiß.

Es sey die gegebene Zahl $= n$, die Summe der Seiten $= 2x$ und die Differentz $= 2d$,

so ist $x+d$ die lange Seite.

und $x-d$ die kurtze. (§. 262.)

Folglich die Zahl $n = x^2 - d^2$,

Und daher das Quadrat $x^2 = n + d^2$ (§. 244.) Nimmt man nun die Quadrat-Wurtzel aus $n+d^2$, so kömmt die Seite des Quadrats x^2, nehmlich x (§. 242.) zu welcher die halbe Differentz addirt, die lange, und subtrahirt, die kurtze Seite giebt.

Hierauf folget die §. 469. erwehnte Tabula Num. Figur.

Erklär. 566. Ein Gnomon Potentialis ist die Differentz einer vorhergehender von der ihr folgenden Potentz.

Z. E. Bey den andern Potentzen ist das Quadrat von $0 = 0$ von $1 = 1$ von $2 = 4$ von $3 = 9$, und also sind die Gnomones Quadratorum: 1, 3, 5 &c.

Zusatz. 567. Die Gnomones Potentiales werden demnach überhaupt gefunden, wenn man die undeterminirte Potentz n^m von der ihr folgenden $(n+1)^m$ subtrahiret. Weil aber die Unität nicht multipliciret, so ist diese letzte, nehmlich $(n+1)^m$ (nach dem 501 §.) $=$

$$n^m + \frac{m}{1} n^{m-1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} n^{m-2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} n^{m-3}$$

$$\text{&c.} + 1$$

Nimmt man nun die vorhergehende n^m von dieser hinweg, so restiret der Gnomon Potentiarum universalis $=$

$$\frac{m}{1} n^{m-1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} n^{m-2} \text{ &c. &c.} + 1.$$

Zusatz. 568. Und daher sind insonderheit die Gnomones

Quadratorum $= \frac{2}{1} n^{2-1} + 1 = 2n^1 + 1$

Cuborum $= \frac{3}{1} n^2 + \frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2} n^1 + 1 = 3n^2 + 3n^1 + 1$

Qv.

Qv. Quadrat: $= \frac{4}{1} n^3 + \frac{4.3}{1.2} n^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3} n^1 + 1 =$

$4n^3 + 6n^2 + 4n^1 + 1$ und so weiter, (§. 496.)

569. Also giebt ieder Gnomon zur vorhergehenden Zusatz. Potentz addirt, die folgende, deren Wurtzel um 1 grösser ist. (§. 255.) z. E. Wenn $n = 13$ und $n^2 = 169$, so ist das folgende Quadrat um $2n + 1$ oder 27 grösser, nehmlich das Quadrat von 14 ist $= 169 + 27 = 196$. Wenn $n = 0$ ist, so ist der erste Gnomon in allen Potentzen $= 1$, und deswegen iede Potentia Unitatis $= 1$.

570. So vor die anfänglichen Potentzen folgende Zusatz. Sätze oder Reihen von 0 angefangen werden, und die letzte Local-Zahl n ist, so ist die Anzahl aller Gnomonum oder Terminorum $= n + 1$, und stehen sie in der Ordnung also:

I. Potentzen oder Naturales.

Local-Zahlen.	Gnomones.	Natur.
0	1	1
1	1	2
2	1	3
so nun 3	1	4
der letzte 4	1	5

$= n$ so ist: $\int n^0 = 4 = (n+1)^1 - 1$

II. Potentzen oder Quadrata.

Loc. Zahlen	Membra Gnomonum			Gnomones	Quadr.
0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	3	4
2	2	2	1	5	9
3	3	3	1	7	16
4	4	4	1	9	25

so $n = 4$ sind $2\int n^1 + \int n^0 = 24 = (n+1)^2 - 1$

III.

III. Potentzen oder Cubi.

Loc. Zahlen	Membr. Gnomonum			Gnomonas	Cubi.
0	0	0 0	0 0 0	1	1	1
1	1	1 1	1 1 1	1	7	8
2	4	4 4	2 2 2	1	19	27
3	9	9 9	3 3 3	1	37	64
4	16	16 16	4 4 4	1	61	125 ꝛc.

so $n = 4$ sind $3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 = 124 = (n+1)^3 - 1$

Und also auch immerfort mit denen übrigen Potentzen.

Nehmlich wenn man in vorhergehenden Reihen die Gnomones von forne her, oder gantz von oben herunter summiret, so kommt iedesmahl die so vielste Potentz, als man in allen Gnomones oder Terminos genommen hat, z. E. wenn man den ersten und andern Gnomonem addirt, kommt die Potentia Binarii, so der Local-Zahl 1 gegen über stehet, addirt man die ersten drey, kommt die Potentia Ternarii, so der Local-Zahl 2 gegen über stehet ꝛc. Folglich geben $n+1$ Gnomones die Potentz von $(n+1)$ so der Local-Zahl n gegen über stehet.

Daferne man aber bey den letzten Gnomonibus anfängt, und summiret von unten hinauf nur so viel Gnomones, als die letzte Local-Zahl n andeutet, so ist der Gnomon von der Nulle oder Zero, (nehmlich die Unität, oder die Unitäts-Potentz nicht dabey,) und daher ist die Summatio n Gnomonum = ihrer Potentz von $(n+1) \div 1$.

55. Aufgabe.

55. Aufgabe. 571. Die Potentzen der Naturalium zu summiren.

1.) Setze man die Summe der nach einander folgenden niedrigern Potentzen, wie auch der Unitäten, und so gar auch die Unität selbsten in einiger Weite von einan-

ander, als so man z. E. die Cubos summiren will, schreibe man:

$$\int n^2 \quad \int n^1 \quad \int n^0 \quad 1$$

2.) Von der Rechten gegen die Lincke, und zwar bey der Unitäten-Summe fange man an, schreibe vor sie die gehörigen Untzen, (hier des Cubi) nehmlich 1. 4. 6. 4) so weit sie reichen wollen, und setze vor iede das Signum - kömmt

$$-6\int n^2 - 4\int n^1 - 1\int n^0 - 1$$

3.) Erhebe man (die gröste Wurtzel + 1) auf die um einen Grad höhere Potentz, und setze sie voran, dann giebt die gantze Expression so viel Summen der vorgegebenen Potentzen (hier der Cuborum) als der letzt erhöheten Potentz Exponente Unitäten hat, kömmt:

$$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - 1\int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

Der Beweiß gründet sich auf die durchgängig einerley Summationes der Gnomonum potentialium, als weil der Gnomon universalis der andern Potentz $= 2n+1$ (§. 568.) n Gnomones aber, (nehmlich alle so denen natürlichen auf einander folgenden Local-Zahlen gegen überstunden) waren mit ihrer Summe $= (n+1)^2 - 1$

Das ist: $2\int n^1 + \int n^0$ waren $(n+1)^2 - 1$ (§. 570)

Folglich sind $2\int n^1 + \int n^0 + 1 = (n+1)^2$ (§. 244.)

Und daher: $2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1$. (§. 254.)

Weiter war das Symbolum Gnomonis Cubici $=$

$$3n^2 + 3n + 1 \text{ (§. 568.)}$$

$(n+1)$

$(n+1)^3-1$ aber war $= 3\int n^2 + 3\int n^1 + 1\int n^0$. (§. 570.)

Dahero ist: $(n+1)^3 = 3\int n^2 + 3\int n^1 + 1\int n^0 + 1$. (§. 244.)

Folglich: $(n+1)^3 - 3\int n^1 - 1\int n^0 - 1 = 3\int n^2$.

Ferner war der Gnom. univ. Qv. Quadraticus $=$

$4n^3 + 6n^2 + 4n^1 + 1$ (§. 568.)

Und $(n+1)^4 - 1 = 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + 1\int n^0$ (§. 568. 570.)

Also $(n+1)^4 = 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + 1\int n^0 + 1$

Folglich $(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - 1\int n^0 - 1 = 4\int n^3$. u. s. w.

Zusatz. 572. Demnach muß einer die niedrigern Potentzen summirt haben, der die Summationes der höhern will vornehmen, und ist dis eben das vornehmste Geheimnüß in der Doctrin der Zahlen (ja auch in andern Studiis wie P. Lamy angemercket *) daß man man dasjenige stückweiß oder nach und nach verrichtet, was man auf einmahl nicht übersehen kan.

Zusatz. 573. So man nun die Valores der ersten und vorhergehenden Potentz-Summen bloß nach der undeterminirten Quantität n berechnet, und eine vor die andere substituiret, so kommen die Summationes

I. Der Unitäten, oder $\int n^0 = n$ (§. 570. I.)

II. Der Naturalium, oder ersten Potentzen, und zwar

$2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 =$

$n^2 + n$. folglich $\int n^1 = (n^2+n) : 2$

* Vid. P. Lamy Elemens des Mathematiques, Lib. I. Sect. I. c. 5. pag. 19.

III.

III. Der Quadratorum oder andern Potenzen, und zwar

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - 1\int n^0 - 1 = n^3+3n^2+3n+1$

$- (3n^2+3n) - n - 1 = (2n^3+6n^2+6n+2):2$

$\frac{2}{2}$

$- (3n^2+3n):2$

folglich $\int n^2 =$ $- (2n+2):2$

$(2n^3+3n^2+n):6.$ $= (2n^3+3n^2+n):2$

IV. Der Cuborum oder dritten Potenzen, und zwar

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - 1\int n^0 - 1 =$

$(n^4+4n^3+6n^2+4n^1+1)$

$- (2n^3+3n^2+n)$

$- (2n^2+2n)$

$- (n+1)$

kommen $4\int n^3 = n^4+2n^3+n^2$ folgl. $\int n^3 = (n^4+2n^3+n^2):4.$

V. Der Quadrato-Quadratorum, oder 4ten Potenzen, und zwar

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1 =$

$(n+1)^5$ aber ist $= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1 =$

$-((10n^4+20n^3+10n^2):4)$ $(12n^5+60n^4+120n^3+120n^2+60n+12):12$

$-((20n^3+30n^2+10n):6)$ $= -(30n^4+60n^3+30n^2):12$

$-(5n^2+5n):2$ $= -(40n^3+60n^2+20n):12$

$-(n+1)$ $= -(30n^2+30n):12$

$= -(12n+12):12$

(§. 359.)

Sind demnach $5\int n^4 =$ $(12n^5+30n^4+20n^3-2n):12$

folglich $\int n^4$ $= (12n^5+30n^4+20n^3-2n):60$ (§. 372.)

Das ist $\int n^4$ $= (6n^5+15n^4+10n^3-n):30.$ (§. 360.)

IV. Der Quadrato-Cuborum oder 5ten Potentzen, und zwar

$$6\int n^5 = (n+1)^6 - 15\int n^4 - 20\int n^3 - 15\int n^2 - 6\int n^1 - 1\int n^0 - 1 =$$
$$n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 6n + 1 =$$

$(2n^6 + 12n^5 + 30n^4 + 40n^3 + 30n^2 + 12n + 2) : 2$
$- \quad (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 \quad - n.) : 2$
$- \quad (10n^4 + 20n^3 + 10n^2) \quad : 2$
$- \quad (10n^3 + 15n^2 + 5n) \quad : 2$
$- \quad (6n^2 + 6n) \quad : 2$
sind demnach - $(2n + 2) : 2$

$6\int n^5 = (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 \quad - n^2) : 2$, folglich

$\int n^5 = (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2) : 12.$ (§. 372.)

Und also weiter kan man auch mit denen übrigen verfahren.

Exempel. 474. Z. E. So man das erste Hundert von denen Quadrato-Cubis summiren wolte, kommen nach dieser letzten Formul:

$2.\ 100^6 = 2000000000000$
$6.\ n^5 = 600000000000$
$5.\ n^4 = 500000000$
2060500000000
$- \ n^2 = 10000$
2060499990000
$4)\ 515124997500$
$3)\ 171708332500 = \int 100^5$

Anmerck. 575. Uberhaupt darff man auch nur die Summation der undeterminirten Potentzen demonstriren, und findet man davon nicht allein in Herrn Hof-Rath Wolffs Elem. Math. Univ.* sondern auch noch eine bequehme Metho-

* Vid. Herrn Hoff-Rath Wolfii Elem. Math. Universæ p. 299.

de,

de, so der Herr Prof. Richter angewiesen, * und sie über dieses noch auf die übrigen Series Figuratas appliciret hat.

576. Indem die andern Series æquidifferentes, (da nehmlich der erste Terminus mehr als 1, und die folgenden immerfort um den ersten wachsen,) nichts anders, als vielfache Series Naturalium seyn, so kan man nur die gefundene einfache Summe nachgehends mit der Potentz des ersten multipliciren, dann kömmt die Summe von denen Potentzen der vielfachen Seriei. Zusatz.

Als so von 3, 6, 9, 12, 15 ꝛc. die Quadrata 9, 36, 81, 144, 225, ꝛc.

Ist ihre Summe (§. 573. III.) $=$ (2.125 + 3.25+5) :6).9 $=$ 495 ꝛc.

Denn so der

erste $=e$, sind von $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$

die Quadrata $=$ $ee1$, $ee4$, $ee9$, $ee.16$ $ee.25$ ꝛc.

oder iede Potentz $=$ $en1$, $en2^n$, $en3^n$, $en.4^n$, $en.5^n$ ꝛc.

Folglich da en beständig einerley, ist iede gefundene simple Summe multiplicirt mit en $=$ der gesuchten vielfachen Summe.

577. Wenn man eine Polygonal-Zahl so vielmahl auf einander setzt, als ihrer Seiten eine Unitäten hat, entstehet eine Säulen- oder Columnar-Zahl. Z. E. so man die Heptagonal-Zahl 55, mit ihrer Seite 5 multipliciret, kommt die Siebeneckigte Columnar-Zahl 275. Erklär.

578. Demnach ist ihr Symbolum $=$ $((w-2)n^3 - (w-4)n^2)) : 2$ (§. 523.) Nehmlich man multiplicirt den Cubum der begehrten Seite mit der Winckel-Zahl-2. Desgleichen dero Quadrat mit der Winckel-Zahl-4, Zusatz.

* Vid. Act. Erud. Suppl. Tom. IX. Sect. VIII. p. 339.

subtrahiret dieses Product vom jenem, und halbiret den Rest.

579. Ein Numerus Pyramidalis ist derjenige, so aus der Addition der Polygonal-Zahlen erwächset. Z. E. 1. 3. 6. 10 sind Trigonal Zahlen, davon sind 1. 4. 10. 10 dreyeckigte Pyramidales. u. s. w.

580. Da nun ieder Polygonus $= ((w-2)n^2 - (w-4)n)) : 2$ (§. 523.) So ist iede Pyramidal-Zahl $= ((w-2)\int n^2 - (w-4)\int n^1)) : 2 =$

$$((w-2).(2n^3+3n^2+n) - (w-4).(3n^2+3n)) : 2$$

$$\frac{\qquad\qquad}{6} \qquad\qquad \frac{\qquad\qquad}{6}$$

(§. 573. III. II.)

$= (2wn^3+3wn^2+wn - 4n^3-6n^2-2n)$
$-3wn^2-3wn+12n^2+12n) : (6:2)$

$= (2wn^3 - 2wn - 4n^3+6n^2+10n) : (6:2$
$= (wn^3 - wn - 2n^3+3n^2+5n) : 6$ (§. 372. 3.)
$= ((w-2)n^3+3n^2-(w-5)n)) : 6$ oder auch
$= ((w-2)n)+3)).n^2-(w-5)n) : 6$

Zusatz. 581. Dahero kan man nach einer gegebenen Seite, (z. E. 8) und der Winckel-Zahl (hier 6.) gar leicht eine Pyramidal-Zahl berechnen, als hier ist die Hexagonal-Pyramidal-Zahl $= (4.8+3) = 35|.64 = 2240|-8 = 2232|:6 = 372$.

Erklär. 582. So man eine Polygonal-Zahl mit (ihrer Seite - 1) multipliciret, und eben dergleichen Pyramidal-Zahl darzu thut, entstehet eine Thurmförmliche, oder Pyrgoidal-Zahl.

Zusatz. 583. Folglich lässet man ein Glied an der Columnar-Zahl fehlen, wenn man dergleichen Pyramidal-Zahl will darauf setzen, als die Pentagonal-Pyrgoidal-Zahl von der Seite 5, ist $= 35.4 = 140|+75$ (§. 581.) $= 215$.

584. So man die gantze Columnar-Zahl behalten Zusatz.
will, setzet man dergleichen Pyramidal-Zahl darauf, deren Seite um 1 weniger ist, als der Columnar-Zahl.

585. Die Pyramido-Pyramidal-Zahlen, Pyramidales Erklär.
secundi entstehen, wenn wir die ersten Pyramidal-Zahlen von forne her addiren, als die vorigen dreyeckigten Pyramidal-Zahlen: 1, 4, 10, 20 addirt, geben die Triangulares Pyramidales secundos: 1. 5. 15. 35 ꝛc.

586. Demnach darff man nur das Symbolum der Zusatz.
Pyramidal-Zahlen $((w-2)n^3+3n^2-(w-5)n)):6$ summiren, so giebt $((w-2)\int n^3+3\int n^2-(w-5)\int n^1)):6$. die generale Expression aller Pyramidalium Secundorum * und so weiter.

587. Der Nutzen der Figürlichen Zahlen ist weit aus- Anmerck.
schweiffend (§. 60.) und braucht man sie nicht allein in der Berechnung allerhand Spiele, deren mögliche Zusammensetzung oder Veränderungen man will einsehen, sondern auch in vielen Compositionen und Divisionen derer Dinge überhaupt, daher sie in der Bau-Kunst zu zierlichen Fußböden, und in der Gärtnerey zu angenehmen Figuren und Setzung der Bäume offtmahls sehr gute Gelegenheit geben.

Von denen Seiten der unvollkommenen Potentzen, oder denen Irrational-Grössen.

588. Latera surda, oder Quantitates surdæ heissen die Erklär.
Wurtzeln, so aus denen unvollkommenen Potentzen gezogen werden. Als V 18 bedeutet Radicem Quadratam aus dem unvollkommenen Quadrat 18.

589. Da nun aus einer Potestate imperfecta die Wur- Zusatz.
tzel weder in Gantzen, noch Gantzen nebst Bruch genau

* Mehr davon besehe man in Herrn Hof-Rath Wolfii Elem. Analyseos pag. 303.

heraus kömmt, (§. 539.) so lassen sich die Latera surda auch nicht einmahl per Approximationem exacte mit Zahlen ausdrucken, iedoch kan man so nahe kommen, daß so viel weniger daran fehlt, als man sich viel will Mühe geben, und wird man unten im Capite Æquationum sehen, wie z. E. die Cubic-Wurtzel aus 2 beynahe $1\frac{259921}{1000000}$,

welches vornehmlich in der Praxi schon genug ist.

Satz. 590. Man exprimiret dahero die Latera surda mit einem Radical-Zeichen ($\sqrt{}$) so schlecht weg eine Quadrat-Wurtzel, oben aber mit einer 3 gekrönet, eine Cubic- mit einer 4, eine Quadrato-Quadrat-Wurtzel ꝛc. anzeiget, welche kleine Ziffern über dem Zeichen die Radical Exponenten heissen, und muß man sich über dem blossen Signo $\sqrt{}$ iederzeit noch 2 concipiren.

Also zeiget $\sqrt[3]{6}$ die Cubic-Wurtzel aus 6 an. $\sqrt[n]{a}$ stellet eine undetermirte Wurtzel aus a vor. $2\sqrt{7}$ bedeutet 2 Radices aus dem Quadrat 7 und sagt man, daß der Zehler (2) ausser dem Zeichen, die unvollkommene Potentz aber (hier 7) unter dem Zeichen stehe. (§. 537.)

Anmerck. 591. Zuweilen muß man der Gleichförmigkeit wegen die Seiten der vollkommenen Potentzen auch mit dergleichen Zeichen exprimiren, als $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{mm} = m$ $\sqrt[n]{a^n} = a$. $\sqrt[n]{e^n a^n} = ea$. $\sqrt[n]{(a^2b)^n} = a^2b$. Und dieses sind nur Latera substituta, eben so, wie offtmahls in Brüchen 3 Gantze durch den Affter-Bruch $\frac{12}{4}$ ausgedrucket werden.

Lehrsatz. 592. Indem die Potentzen aus der continuirlichen Multiplication einer Zahl in sich selbst ent-

entstehen, (§. 473.) und einerley Buchstaben in Multipliciren nur die Addition der Exponenten erfordern, (§. 235. 3.) so kan man auch $\sqrt{a}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt[3]{b}$ mit $b^{\frac{1}{3}}$, desgleichen $\sqrt[3]{n^2}$ mit $n^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[m]{a}$ mit $a^{1:m}$, überhaupt $\sqrt[n]{a}$ mit $a^{n:m}$ exprimiren.

Denn $a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{2}}$ ist $= a^{\frac{2}{2}}$ nehmlich dem unvollkommenen Quadrat a^1 oder $a^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}}$ $(= \sqrt[3]{a^2})$ und $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} . = a^{\frac{3}{3}} = a^1 =$ dem unvollkommenen Cubo a. Nehmlich so a einem vollkommenen Cubo z. E. 8 gleich wäre, so wäre $a^{1:3} = 2 \| a^{1:3} . a^{1:3} = 4 = a^{2:3} =$ $64^{\frac{3}{4}} = 4^{\frac{2}{4}}$ ꝛc. Eben also ist $n^{\frac{3}{4}} . n^{\frac{3}{4}} = n^{\frac{6}{4}}, n^{\frac{2}{4}} . n^{\frac{3}{4}} = n^{12:4} =$ dem unvollkommenen Biquadrato n^3. und so weiter.

593. Dieser besondern Manier dergleichen Poten- Anmerk. zen und ihre Wurtzeln zu bezeichnen, bedienten sich zuerst Leibnitius und Newton, und wird wegen ihrer nunmehrigen Bequehmlichkeit der alten Radical - Bezeichnung gar sehr vorgezogen. *

594. Da man nun zweyerley Brüche unter einerley Benennung bringen kan, (§. 358.) so lassen sich auch zwey oder mehr Quantitates Irrationales auf einerley Zusatz.

* Vid. Wallisii Treatise of Algebra Cap. XCI. pag. 330. Ingleichen Herrn Hof-Rath Wolfii Elem. Analyseos pag. 257. §. 51.

Bezeichnung bringen, wenn man ihre Brüchs-Exponenten auf den allgemeinen Nenner reduciret, als

$$a^{1:2} \text{ und } n^{1:3} = a^{3:6} \text{ und } n^{2:6} = \sqrt[6]{a^3} \text{ und } \sqrt[6]{n^2}.$$

$$\sqrt[3]{7} \text{ und } \sqrt{2} = 7^{1:2} \text{ und } 2^{1:3} = 7^{3:6} \text{ und } 2^{2:6} = \sqrt[6]{7^3} \text{ und } \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{343} \text{ und } \sqrt[6]{4}.$$

Ein Exempel in aufgänglichen Zahlen kan davon seyn:

$$3 + 2 = \sqrt{9} + \sqrt[3]{8}. = 9^{1:2} + 8^{1:2} = 9^{3:6} + 8^{2:6}$$

$$= \sqrt[6]{9^3} + \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{729} + \sqrt[6]{64} = 3 + 2$$

(§. 475.)

Zusatz. 595. Daher dann die Regul zu dieser Reduction nicht schwehr fället: Nehmlich man multiplicire die Radical-Exponenten in einander. Ferner erhebe man iede Quantität unter dem Radical-Signo auf diejenige Potentz die der andere Radical-Exponente anzeiget: Endlich bezeichne man iede mit dem Signo des vorigen Facti.

$$\text{Z. E. } \sqrt[3]{4} \text{ und } \sqrt[4]{5} = 4^{12} \text{ und } 5^{12} = \sqrt[12]{4^4} \text{ und } \sqrt[12]{5^3}$$

$$= \sqrt[12]{256} \text{ und } \sqrt[12]{125}.$$

$$\sqrt{4} \text{ und } \sqrt[3]{27} = \sqrt[6]{64} \text{ und } \sqrt[6]{729} = 2 \text{ und } 3.$$

(§. 475.)

Anmerck. 596 Der Kürtze wegen erfindet man so gleich den Dividuum Minimum (§. 339. 340.) so kommen die verwandelten Brüche stracks in kleinsten Terminis, und folglich auch die zu extrahirenden Wurtzeln im niedrigsten Grade.

Als: $\sqrt[6]{8}$ und $\sqrt[4]{5}$ oder $8^{1:6}$ und $5^{1:4}$

$= 8^{2:12}$ und $5^{3:12} =$

$\sqrt[12]{8^2}$ and $\sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{64}$ und $\sqrt[12]{125}$.

597. Schlechterdings addirt man die Irrationales mit Rationalen und Irrationalen vermittelst des Signi +, als Ursprung und Erklärung

$\sqrt{b}$ und a giebt die Summe $a + \sqrt{b}$. $\sqrt[3]{n}$ und $\sqrt[3]{x}$ ist $= \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{x}$. Dergleichen Summen dann Binomia heissen, und sagt man, das erste habe einen Rational-Theil, (a), und einen Irrational-Theil, ($\sqrt{b}$) das andere aber zwey Surdische oder Irrational-Theile $\sqrt[3]{n}$ und $\sqrt[3]{x}$. des Binomii.

598. Eben auf diese Art ziehet man sie auch von einander ab, als so von a die $\sqrt{b}$, oder von $\sqrt[3]{n}$ die $\sqrt[3]{x}$ soll subtrahirt werden, schreibet man $a - \sqrt{b}$ oder $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{x}$, und heist man dieses Apotome oder Residuum. des Residui.

599. Soll man $\sqrt{ab}$ mit n multipliciren, so geschiehet es durchs nebenansetzen, (§. 76.) und ist das Factum $= n\sqrt{ab}$. Also $(n + r)$ multiplicirt mit $\sqrt{y}$ $= (n + r)\sqrt{y}$. oder $\sqrt{5}$ multiplicirt mit $7 = 7\sqrt{5}$ desgleichen $\sqrt{2}$ multiplicirt mit $\sqrt{3}$ ist $= (\sqrt{2})(\sqrt{3})$. oder $\sqrt{2}\sqrt{3}$. Anmerck.

600. Eine Irrationalis $\sqrt{n}$ oder $1\sqrt{n}$ dividirt mit a giebt $\frac{\sqrt{n}}{a}$ oder $\frac{1}{a}\sqrt{n}$. $\sqrt{11}$ dividirt mit $3 = \frac{\sqrt{11}}{3}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{11}$. Anmerck.

$\sqrt[n]{((ax(c-dy))} : x = a\sqrt[n]{(c-dy)}$ desgleichen $(em\sqrt[n]{x}) : e = m\sqrt[n]{x}$.

Lehrsatz. 601. Wenn sich zwey gleichnahmige Potentzen eben so verhalten wie zwey andere gleichnahmige Potentzen, so verhalten sich auch der ersten ihre Radices gegen einander, wie der andern ihre Radices, als wenn

a^n gegen $e^n a^n$ wie b^n gegen $e^n b^n$

so ist auch a gegen ea wie b gegen eb. (§. 591. 271.)

Zusatz. 602. Derohalben bekommt man das Product zweyer Radicum, so man aus dem Product ihrer Potentzen dieselbe Radicem extrahiret, als das Product der zwey Wurtzeln b und eb kommt heraus, so man ihre Potentzen b^n und $e^n b^n$ multiplicirt, und aus dem Product $b^n e^n b^n$ die $\sqrt[n]{}$ extrahiret, nehmlich beb. (§. 591.)

Z. E. Wenn 1 gegen 4 wie 9 gegen 36
so ist $\sqrt{1}$ gegen $\sqrt{4}$ wie $\sqrt{9}$ gegen $\sqrt{36}$
oder 1 gegen 2 wie 3 gegen 6.
Multipliciret man nun 36 mit 9 kommt 324.
Dann ist $\sqrt{324}$ oder $18 = 3.6$

Zusatz. 603. Und hierinne fundirt sich die Multiplication der Irrationalium, nehmlich man multiplicirt die Quantitäten unter dem Radical-Zeichen mit einander, und setzet dem Product solch Zeichen wieder vor, als $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, oder in aufgänglichen Zahlen: $\sqrt{4}.\sqrt{9} = \sqrt{36}$, das ist: $2.3 = 6$.

Uberhaupt: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Denn weiln

1 gegen a wie b gegen ab, und

$\sqrt[n]{1}$ gegen $\sqrt[n]{a}$ wie $\sqrt[n]{b}$ gegen $\sqrt[n]{ab}$, ist

die

die Unität gegen den Multiplicanten, wie der Multiplicandus gegen das gehörige Product. (§. 97.)

604. Demnach ist z. E. $V aabc = Vaa.Vbc = aVbc$ Zusatz. (§. 591. und 599.) und kan man hierdurch eine Irrational-Grösse auf eine eines Theils rationale Expression reduciren, wenn man siehet, daß sie mit einem Quadrato, Cubo. Biquadrato &c. divisibel ist.

Als $V45 = V9 . V5 = 3V5$. Desgleichen $\sqrt[3]{32}$ $= \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$ &c.

605. Daferne nun die Quantitäten unter dem Signo einerley werden, so nennet man dergleichen Irrationales mit einem besondern Wort Communicantes, oder auch Commensurabiles. Erklär.

Als $2V5$ und $3V5$ sind Communicantes, und sind unter einerley Nenner (nehmlich $V5$) gebracht, folglich kan man sie nunmehro auch addiren. (§. 85.)

606. Das Quadrat von zweyen Irrationalibus $Va + Vb$ ist $= a + b + 2V ab$ (§. 479.) Denn $Va . Va = Vaa = a$ und $Vb . Vb = Vbb = b$ (§. 603.) und $1Vab + 1Vab = 2Vab$. (§. 605.) Lehrsatz.

607. Die Summe, (oder auch die Differentz) zweyer Zahlen wird erkannt, so man aus dem gegebenen Quadrato Summæ, (oder auch Differentiæ,) Radicem extrahiret. Als $V(a^2 \pm 2ab + b^2) = a \pm b$ (§. 500. und 532.) und also auch mit andern Potestäten. Anmerck.

608. Will man erkundigen, ob zwey Irrational-Grös- sen communicantes seyn, so hebe man beyde Quantitäten unter dem Zeichen so lange mit einer dritten auf, biß die Quoti dergleichen Potentiæ perfectæ werden, dann setzet man ieder Wurtzel vor, und den gemeinen Divisorem Anmerck.

u[illegible]er das Zeichen, und sind die zugleich auch mit reducirt, z. E. Wenn V 54 und V 150 sollen angehen, hebe man m

6 auf, kommen 9 und 25, deren Wurtzeln 3 und 5, geben 3V6 und 5V6.

Also auch $\sqrt[3]{24}$ und $\sqrt[3]{81}$ aufgehoben

mit 3) 8 27

Deren Wurtzeln 2 und 3

geben $2\sqrt[3]{3}$ und $3\sqrt[3]{3}$. &c.

Uberhaupt: Wenn $\sqrt[n]{a^n b}$ und $\sqrt[n]{c^n b}$ mit einer dritten Quantität (b) aufgehoben werden,

kommen a^n und c^n,

deren Wurtzeln a und c mit der

$\sqrt[n]{b}$ multipl. geben: $a\sqrt[n]{b}$ und $c\sqrt[n]{b}$.

(§. 599. und 604.)

Zusatz. 609. Wodurch solch Aufheben, (und zwar mit allen Divisoribus) nicht zwey dergleichen Potentiæ perfectæ heraus dividirt werden, da ist auch keine Communication zu erhalten.

Anmerck. 610. Oder man erfähret auch, ob zwey Irrationales commensurabel seyn, wenn man eine Quantität unter dem Signo auf die um einen Grad niedrigere Potentz eleviret, und sie mit der andern Quantität, (so nehmlich unterm andern Signo,) multipliciret, dann muß aus dem Facto eine völlige Radix des gemeinen Signi können gezogen werden, wann beyde Communicantes seyn. Denn $V a^2 b$ und $V c^2 b$ geben aus der ersten Potentz $(a^2 b)^1 . (c^2 b)$ ein Quadrat $a^2 b^2 c^2$, dessen aufgängliche Wurtzel $= abc$.

Fer-

Ferner geben $\sqrt[3]{a^3b}$ und $\sqrt[3]{c^3b}$ aus der Potentz $(a^3b)^2.c^3b$, Nehmlich aus $a^6b^2.c^3b$, das ist aus $a^6b^3c^3$ eine völlige Cubic-Wurtzel a^2bc. Desgleichen $\sqrt[4]{a^4b}$ und $\sqrt[4]{c^4b}$ aus der dritten Potentz $(a^4b)^3.c^4b$, nehmlich aus $(a^{12}b^3).(c^4b)$ das ist, aus $a^{12}b^4c^4$ eine exacte Quadrato Quadrat-Wurtzel a^3bc, und so immerfort, also wenn der Radical-Exponente $= n$, so ist die erste Quantität unter dem Signo auf die Potentz des Exponenten $n-1$ zu erheben, und mit der andern Quantität zu multipliciren. Z. E. Von $\sqrt{45}$ und $\sqrt{80}$ ist $(45)^1.80 = 3600$, deren Radix $= 60$. Von $\sqrt[3]{24}$ und $\sqrt[3]{81}$ ist $24^2.81 =$ 46656 davon Rad. Cub. 36. Und demnach sind vorhergehende Surdi communicantes.

56. Aufgabe.

611. Die Surdischen Grössen zu addiren. 56. Aufgabe.

Wo sie verschiedene Radical-Zeichen haben, bringe man sie vorher auf einerley, nach dem 595. §. Dann erkundige man nach einem von vorhergehenden beyden Paragraphis ihre Communication, und so sich eine findet, reducire man sie auf einerley Benennung und addire die Zehler; Wo nicht, so hänge man sie nur mit dem Signo + zusammen. Als es seyen zu addiren:

	(3		
$\sqrt{12}$	12 1:2	4	$2\sqrt{3}$ (§. 608.)
und $\sqrt{108}$	108 1:2	kommen	
		36 und	$6\sqrt{3}$

oder Summa: $8\sqrt{3} = \sqrt{64.3} = \sqrt{192}$.

So sind auch

$$\begin{array}{lll|l|l|l} \sqrt[3]{256} & 256^{1:3} & (4 & 64 & 4\sqrt[3]{4} & 4.\ (4^{1:3}) \\ \text{oder} & & & & & \\ \sqrt[3]{864} & 864^{1:3} & & 216 & 6\sqrt[3]{4} \text{ oder } & 6.\ (4^{1:3}) \end{array}$$

in Summa: $10.\ (4^{1:3})$

$= (1000.4)^{1:3}$

$= 4000^{1:3}$. Extrahiret man nun aus 4000, oder 4000 000 000 ꝛc.

die Cubic-Wurtzel, so bekommt man die Summe durch Näherung. (§. 589.)

Man addire

$$\begin{array}{lll|l|l} & \sqrt{24a^2} & (6 & 4a^2 & 2a\sqrt{6} \\ \text{und} & \sqrt{6a^2} & & 1a^2 & a\sqrt{6} \end{array}$$

Summa: $3a\sqrt{6}$ Desgleichen

$$\begin{array}{lll|l|l} & \sqrt{3a^2} & (3 & 1a^2 & a\sqrt{3} \\ \overline{\sqrt{d^2b}} & \text{und} & \overline{\sqrt{12a^2}} & & \\ & \sqrt{d^2b} & & 4a^2 & 2a\sqrt{3} \end{array}$$

Summa: $\left\{ \dfrac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{d^2b}}. \right.$

Von $\sqrt{13}$ und $\sqrt{10}$ ist die Summa $\sqrt{13}+\sqrt{10}$.

Anmerck. 612. Wo 2 und mehr Communicantes zu addiren, die mit denen Signis + und - vielfältig abwechseln, da verfahre man nach der 13. Aufgabe. s. 224. f. E.

Ein Binomium $9+\sqrt{11}$ oder $\sqrt{15}+2$
Und Residuum $9-\sqrt{11}$ und $\sqrt{15}-2$

geben 18 und hier $2\sqrt{15}$, nehmlich das Duplum der grössern (§. 260.)

57. Aufgabe.

57. Aufgabe.

613. Die Surdischen Zahlen zu subtrahiren.

Hier bringet man sie (wo es möglich) gleicher Gestalt auf einerley Benennung, und subtrahiret die Zehler. (§. 92.) Wo es aber nicht angehet, connectiret man sie bloß mit dem Signo —.

Von $V50$ oder von $50^{1:2}$ das ist von $5.(2^{1:2})$
Subtr. $V18$ subtr. $18^{1:2}$ subr. $3.(2^{1:2})$

Rest: $2.(2^{1:2})$

$= (4.2)^{1:2} = 8^{1:2}$

(3

Von $375^{1:3}$ | 125 von $5.(3^{1:3})$

Subtr. $81^{1:3}$ | 27 subtr. $3.(3^{1:3})$

Rest: $2.(3^{1:3})$

(c

Aus $\frac{(4a^2b^2c)^{1:2}}{(de^2)^{1:2}}$ subtrahire man $\frac{(64c)^{1:2}}{(de^2)^{1:2}} \mid \frac{4a^2b^2}{64}$

Dahero von $(2ab).c^{1:2}$ Subr. $8.c^{1:2}$,

Rest: $(2ab-8).c^{1:2}$

$(de^2)^{1:2}$ (§. 370.)

Von $V7$ und $V5$ ist die Differenz $V7 - V5$,
oder $7^{1:2} - 5^{1:2}$

614. Ein Residuum von seinem Binomio subtrahirt, lässet das Duplum desjenigen, so das Signum † vor sich stehen hatte.

Als

Als von $2 \dagger V3$	oder von $V13 \dagger 2$
Subtr. $2 - V3$	Subtr. $V13 - 2$
Rest: $2V3$	Rest: 4

Nehmlich das Duplum der kleinern. (§. 261.)

Anmerck. 615. Weil $7^{1:2} + 5^{1:2} = ((7 + 5 + (2 . (35^{1:2}))^{1:2}$ (§ 606. 607.) so hat man noch eine Manier die Quadrat-Surdischen Grössen zu addiren und zu subtrahiren, nehmlich wenn man zur Summe der beyden unvollkommenen Quadraten die doppelte Radicem aus ihrem Facto addirt oder subtrahiret, und endlich aus dem Aggregato oder Residuo Radicem extrahiret.

$$\text{Z. E. } V18 + V8 = (26 + 2V144)^{1:2} = V26 + 24$$
$$= V50 = V25.2 = 5V2.$$

$$\text{Uberhaupt } Va \pm Vb = (a + b \pm 2Vab)^{1:2}$$

Vortheil. 616. Hieraus entstehet ein Vortheil, denn da man sonsten in der Additione und Subtractione Quantitatum asymmetrarum die Wurtzel per Approximationem zwey mahl erfinden muß, braucht man sie hier nur einmahl auszuziehen.

58. Aufgabe.

58. Aufgabe. 617. Die Irrationales zu multipliciren.

Man multipliciret die Quantitäten unter dem Signo mit einander, und setzet dem Facto eben das Radical-Zeichen wieder vor. (s. 603.)

$$V27 . V12 = V324 = 18. \quad || \quad Vab . Vcb = Vacbb = bVac.$$

Anmerck. 618. Wenn die Factores communicantes seyn, extrahire man aus dem Quadrato Quantitatis sub Signo die

die Wurtzel solches Signi, und setze ihr das Factum der Zehler vor.

Denn $(a \overset{n}{\vee} b).(c \overset{n}{\vee} b) = ac.(b2:n)$

619. Bey dergleichen Quadrat-Surdis stehet die Zusatz-Wurtzel schon da, und kommt daher allemahl eine Rational-Zahl heraus.

Z. E. $2 \vee 5 . 3 \vee 5 = 2.3.5 = 30$

Nehmlich $a \vee b . c \vee b = acb$

Bey den Cubischen muß man aus dem Quadrat der surdischen Zahl Radicem Cubicam,

Bey denen Quad. Quadratischen, aus dem Quadrat der surdischen Zahl Radicem Quadrato-Quadratam, oder (weil $2:4 = 1:2$) nur aus ihr Rad. Quadratam extrahiren, &c.

620. Also auch $2 \vee 3 . 5 \vee 7 = 10 \vee 21$. Nehmlich Zusatz. $a \vee b . c \vee d = ac \vee bd$.(S. 110.)

621. Wo verschiedene Radical-Zeichen sind, muß Anmerck. man sie erst nach den 595. S. auf einerley reduciren: Als $\vee 5 . \vee cub : 7$ das ist $5^{1:2}$ multipl. mit $7^{1:3} = 5^{3:6}\ 7^{2:6}$

$= 125^{1:6}$

$(7.7)^{1:6}$

875

Fac. $6125^{1:6}$

622. Wo componirte Irrationales zu multipliciren, Anmerck. bediene man sich der Reguln, so S. 235 gegeben, reducire erstlich die Factores, hernach in Factis partialibus so viel angehet, und addire zuletzt wie gewöhnlich.

Z. E.

Z. E. Man multiplicire $12+\sqrt{125}$ mit $6+\sqrt{20}$

$12+5\sqrt{5}$	Desgleichen $5+\sqrt{24}$
$6-2\sqrt{5}$	mit: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$72+30\sqrt{5}$	$+\sqrt{75}+\sqrt{72}$
$-50-24\sqrt{5}$	$\sqrt{50}+\sqrt{48}$
Fac. $22+6\sqrt{5}$.	Facit. $\sqrt{242}+\sqrt{243}$

623. Also ist $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+\sqrt{4ab}$, und

$(a+\sqrt{b})^3 = a^3+3ab+(3a^2+b)\sqrt{b}$ &c.

Zusatz. 624. Folgende Binomia mit ihren Residuis multiplicirt, geben eine Rational-Zahl, als

$3+\sqrt{5}$	$5+2\sqrt{3}$
$3-\sqrt{5}$	$5-2\sqrt{3}$
$-3\sqrt{5}-5$	$25+10\sqrt{3}$
$9-3\sqrt{5}$	$-12-10\sqrt{3}$
$9-5 = 4$	Fac. 13.

59. Aufgabe.

59. Aufgabe.

625. Die Irrationales zu dividiren.

Indem die Division wieder aus einander nimmt, was die Multiplication zusammen gesetzet, so darff man nur die Quantitäten unter dem Signo in einander dividiren, und ihr Radical-Zeichen ihnen wieder vorsetzen, als:

$\sqrt{324}:\sqrt{27} = \sqrt{12}\,|\,6\sqrt{ae}$ oder $\sqrt{aebb}:\sqrt{ab}$

$= \sqrt{eb}$.

$\sqrt{32}:4$ das ist $\sqrt{32}:\sqrt{16} = \sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{32}$.

$\sqrt[3]{45}:\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{5}\,||\,\sqrt[n]{ab}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a}$. (§. 130.)

$ad\sqrt{bc}:a\sqrt{b} = d\sqrt{c}$. und $acb:a\sqrt{b}$, das ist:

$\sqrt{aaccbb}:\sqrt{aab} = \sqrt{ccb} = c\sqrt{b}$

626.

626. Wenn man den Diviſorem, (ſo er ein Binomium mit ſeinem Reſiduo, und vice verſa,) mit ſeinem Contrario, und eben hiermit auch den Dividendum multiplicirt, ſo ſind dieſe Facta ſo vielmahl in einander enthalten als der Diviſor im Dividendo. (§. 269) Nun aber kömmt erſten Theils aus ſolcher Multiplicatione contraria iederzeit eine Rational Zahl heraus, (§. 624.) Derowegen darff man nur mit ſolcher Rational-Zahl alle Theile des Dividendi dividiren, (§. 292) ſo iſt die Diviſion der componirten Irrationalum um ein groſſes erleichtert, z. E. Man dividire $22+\sqrt{180}$ mit $6-\sqrt{20}$, Fac. $12+\sqrt{125}$. Anmerck.

Diviſor	$6-2\sqrt{5}$	Dividendus	$22+6\sqrt{5}$
Contrarium	$6+2\sqrt{5}$	Contr. Diviſ.	$6+2\sqrt{5}$
	$36-12\sqrt{5}$		$132+36\sqrt{5}$
	$-20+12\sqrt{5}$		$+60+44\sqrt{5}$
Fac.	16.		$192+80\sqrt{5}$

16) $192+80\sqrt{5}$

kömmt der Quotus $= 12+5\sqrt{5}$

$12+\sqrt{125}$.

Uberhaupt, ſo die Rational-Zahl $= r$, und der Dividendus mit dem Contrario multiplicirt $= ac+c\sqrt{b}+a\sqrt{d}+\sqrt{bd}$ ſo iſt der Quotus

$$= \frac{ac}{r}+\frac{c}{r}\sqrt{b}+\frac{a}{r}\sqrt{d}+\frac{1}{r}\sqrt{bd},$$

Als ſo man ſoll $4+\sqrt{5}$ mit $3-\sqrt{3}$ dividiren, ſtehet es alſo:

Diviſ.	$3-\sqrt{3}$	Divid.	$4+\sqrt{5}$
Contr.	$3+\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$
	$9-3=6$	Fac.	$(12+3\sqrt{5}+4\sqrt{3}+\sqrt{15}):6$

Daher iſt der Quot

$$= 2+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{6}\sqrt{15}.$$

Mit dem Divisore $aVb - Vdbf$, dividire man den Dividendum:

$$adb + aV(fgbb) - dbVdf - fV(dbgh) \mid dVb + Vfgb$$

$$adVbb + aV(fgbb) - dVdbfb - Vdbffgh \quad \text{Quotus.}$$

oder adb — oder $-dbVdf - fV(dbgh)$ — oder

Anmerck. 627. Ein mehrers hiervon, desgleichen wie aus den Irrationalibus Radix Quadrata und Cubica zu extrahiren, wird unten im Capite Æquationum vorkommen.

II. Capitel.
Von der Reductione Numerorum.

§. 628.

Erklär. Die Reduction überhaupt lehret, wie man eine Zahl von einer gewissen Art oder Benennung in eine gleichgültige von einer andern Art oder Benennung verwandeln soll. Z. E. 4 Sp. Duc. auf Thl. reducirt, thun just 11 Thl. insonderheit aber zeiget sie, wie gleiche Zahlen mit beybehaltener Gleichheit dennoch können vergrössert oder verkleinert werden.

Anmerck. 629. Welchergestalt man die genannten Theile der Gantzen in Gantze, und vice versa, die unterschiedene Benennung der Brüche auf einerley, ja iede ihre Benennung auf eine andere gegebene bringen soll, ꝛc. ist unter dem Nahmen der simplen Reduction im ersten Theil §. 183. seqv. 358. 359. seq. und vielen andern Orten schon angewiesen. Wird demnach nur noch das nöthigste von der zusammen gesetzten Reduction hier beyzubringen seyn, wozu denn vornehmlich die Verwandlung 1.) Der gleichgeschätzten Zahlen. 2.) Der gemeinen Zahlen in Decimales. 3) Der Müntzen, Maase und Gewichte in einander, gehören möchten.

1. Von

1. Von denen Veränderungen der gleichgeschätzten Grössen.

630. Der Grund davon beruhet zwar auf dem gemeinsten und bekanntesten Ausspruch: Æqualia æqualibus addita, vel demta, multiplicata, vel divisa, faciunt æqualia, alleine die Application desselben ist um so viel sonderbahrer; Denn eben hieraus formiret man die Arithmetische Balance, welche in beyden Schaalen immerzu gleiches erfordert, woferne die Zunge nicht soll unrichtig weisen. Grund der Reduction.

631. Es werden aber die gleichen Grössen mehrentheils so lange verändert, biß davon eine unbekannte, x, y, oder z, deren Gehalt man vornehmlich verlanget, auf einer Seite alleine bleibt, und geschiehet dieses theils durch Anmerck.

632. α.) Die Addition, wenn das fehlende wieder hinzu gethan wird. Als bey denen Æqualibus $15 - 3 = 9 + 3$ und $x - a = n$ addire man beyderseits 3, oder a, kommen $15 = 9 + 6$ und $x = n + a$ (§. 244.)

633. β.) Die Subtraction, so man das hinzugethane wieder hinweg nimmt, als bey $12 + 8 = 9 + 11$ und $3y + b = 2y + a$ subtrahire man beyderseits 8 oder $2y + b$, kommt eine andere Gleichung, darinnen $12 = 1 + 11$ und $y = a - b$ (§. 254.)

634. Dahero lässet sich iede Quantität von einer Seite wegschaffen, wenn man sie mit dem contrairen Zeichen auf die andere Seite bringt, und wird diese Versetzung vom Vieta und Ozanam Antithesis genennet. Anmerck.

635. γ.) Die Multiplication, wenn die verlangte Grösse in einem oder etlichen Brüchen gegeben, oder mit andern Grössen dividirt ist, als wenn

$\frac{2}{3}$ Thl. $=$ 16. Gr. Und $\frac{x}{n} = a + b$

so multiplicire man beyderseits mit 3 oder n, kömmt 2 Thl. $=$ 48 Gr. Und $x = na + nb$.

(§. 263. 371. d.) Wenn $x+d = \sqrt{(aa-bb)}:n$ so ist $nx+nd = aa-bb$, oder $nx = aa-bb-nd$ (§. 633.)

Desgleichen wenn $\frac{1}{4}x^3+ax^2-\frac{bccx}{a} = ab^2$, multiplicire man mit dem Facto der beyden Nenner, nehmlich mit $4a$ kommt:

$$ax^3+4aax^2+4bccx = 4a^2b^2.$$

Und solcherley Art die Brüche wegzubringen, heist man sonsten auch Isomeriam.

636. Hieher gehört auch die Befreyung gleicher Grössen von einer Irrational-Expression oder Asymmetrie.

Z. E. Wenn $\sqrt{ax} = c+d$, multiplicire man die Æqualia beyderseits quadratisch, kommt

$$ax = c^2+2cd+d^2. \quad (§. 479.)$$

Wenn $\sqrt[3]{(a^2b+c^2d)} = x-n$, dann ist der Cubus

$$a^2b+c^2d = x^3-3x^2n+3xn^2-n^3 \quad (§. 490.)$$

Wenn $x^2-\sqrt{bbcx} = ab$, so ist $x^2-ab = \sqrt{bbcx}$ (§. 634.)

Und $x^4-2abx^2+a^2b^2 = b^2cx$ (§. 479.)

637. d.) Die Division, theils wenn die verlangte Grösse mit andern einfachen oder zusammen gesetzten multiplicirt ist, als so 3 Sp. Thl. $=$ 4 Thl. dividire man beyde Membra mit 3, dann ist 1 Spec. Thl. $=$

$1\frac{1}{3}$ Thl.

Wenn $7x = 63$ und $9y^2 = 36$, dividire man beyderseits mit 7 oder 9, kommt $x = 9$. Und $y^2 = 4$. (§. 284.)

Wenn

Wenn $mx = a+b$ so ist $x = (a+b) : m$, Also auch wenn $ny^2 + ay = cb-de$, Und $ax^2 - bx^2 = mn$ dividire man jene Gleichung mit n, und diese mit $a-b$, kömmt $\frac{y^2+ay}{n} = (cb-de) : n$ Und $\frac{x^2}{a-b} = mn$

(§. 240.)

Solche Herunterbringung der verlangten Grösse auf Anmerk. den Unitäts-Zehler, nennte man sonsten mit einem Wort: Parabolismum.

638. Theils, wenn man die gantze Gleichung auf einen niedrigern Grad bringen kan, als so

$x^4 + 2ax^3 = b^2x^2$ dividirt man allerseits mit x^2) kommt: $x^2 + 2ax = bb$. Desgleichen so

$x^2 + 4ax - 12a^2 = 0$ Dividire man beyderseits mit $x-2a$) kömt $x+6a = 0$ (§. 240.)

Und diese Reduction hieß man ehemahls Hypobibasmum. *

639. Theils, wenn die verlangte Grösse nicht selbst, sondern eine oder etliche ihrer Potentzen auf einer Seite zum Vorschein kommen, denn da extrabiret man nur auf beyden Seiten ihre Wurtzel, (welche Extraction eben auch eine Art der Division ist, worinnen nehmlich der Divisor aus des Quots erster, oder auch einer seiner höhern Potentzen bestehet, z. E.

Wenn $x^3 = abc$, so ist $x = \sqrt[3]{abc}$.

Wenn $x^4 + 2ax^3 + aax^2 = b^2c^2$, so ist $x^2 + ax = bc$.

* Von dergleichen Benennungen besehe man Ozanams Nouveaux Elemens d' Algebra pag. 147. seq.

Wenn $x^{\frac{1}{3}} + 1 - x^{\frac{3}{4}} + - x^{\frac{1}{8}} + - \equiv n^3$, so ist

$$x + \frac{1}{2} \equiv n.$$

640. Theils, wenn man siehet, daß nach geschehener Extraction ein bekannter Rest bleibet, als wenn $x^2 + 2ax \equiv cb$, und man aus dem ersten æquali Radicem extrahiret, restiret $-aa$ (§. 532.) Derowegen addire man auf beyden Seiten aa, kommt $x^2 + 2ax + aa \equiv cb + aa$, davon die Wurtzel beyderseits ausgezogen, giebt $x + a \equiv V(cb + aa)$ und folglich $x \equiv V(cb + aa) - a$ (§. 633.)

Desgleichen wenn $x^3 + 6ax^2 + 12aax \equiv ab^2$, und nach Cubischer Extraction $-8a^3$ restiret, (§. 550.) so addire man diesen Rest beyderseits, kommt $x + 2a \equiv \sqrt[3]{(ab^2 + 8a^3)}$ Und durch Versetzung $x \equiv \sqrt[3]{(ab^2 + 8a^3)} - 2a$.

Exempel. 641. Zuweilen braucht man meist alle Reguln zu einer Reduction, z. E. wenn

$$\frac{a + V(bxx - 2cx + d^3)}{Vr} \equiv n, \text{ so ist}$$

$$\frac{V(bxx - 2cx + d^3)}{Vr} \equiv n - a \text{ (§. 632.)}$$

$$\frac{bx^2 - 2cx + d^3}{r} \equiv n^2 - 2an + a^2 \text{ (§. 636.)}$$

$$bx^2 - 2cx + d^3 \equiv rn^2 - 2ran + ra^2 \text{ (§. 635.)}$$

$$bx^2 - 2cx \equiv rn^2 - 2ran + ra^2 - d^3 \text{ (§. 632.)}$$

$$\frac{x^2 - 2cx}{b} \equiv (rn^2 - 2ran + ra^2 - d^3) : b \text{ (§. 637.)}$$

$x^2 -$

$$x^2 - \frac{2cx}{b} + \frac{c^2}{b^2} = ((rn^2 + zran + ra^2 - d^3) : b)) + \frac{c^2}{b^2}$$

(§. 640.)

$$x - \frac{c}{b} = V((rn^2 + zran + ra^2 - d^3) : b) + \frac{c^2}{b^2}))$$

(§. 639.)

$$x = V((rn^2 + zran + ra^2 - d^3) : b) + \frac{c^2}{b^2})) + \frac{c}{b}$$

Oder weil eine Radix negativa eben so gut ein Quadratum affirmativum bringt, als eine affirmativa. (§. 533.)

$$x = -V((rn^2 + zran + ra^2 - d^3) : b) + \frac{c^2}{b^2})) + \frac{c}{b}$$

642. Wie man endlich zwey und mehr Gleichungen in eine bringen, und daraus den Gehalt der gesuchten Grösse finden soll, wird sich unten in dem IV. Capitel von Æquationibus ausführlicher zeigen lassen. Anmerck.

2. Von der Veränderung der gemeinen Zahlen in Decimales.

643. Die Decimal-Zahlen sind nichts anders als Erklär. Brüche, deren Zehler nur angedeutet, die Nenner aber, (wie bey den gantzen Zahlen) aus den Stellen verstanden werden.

Als 6,37 bedeutet, daß $\frac{3}{10}$ und $\frac{7}{100}$, oder welches einerley, $\frac{30}{100}$ und $\frac{7}{100}$ das ist: $\frac{37}{100}$ noch zu ihren 6 Gantzen hinzu gethan worden.

Nehmlich in dem ersten Ort nach dem Scheide-Haacken, Punct oder Commate verstehet man Zehn-Theile,

im andern Ort Hundert-Theile ꝛc. (§. 9.) und stehet es auch frey, ob man die ersten Primen, die andern Secunden, die dritten Tertien, u. s. w. nennen will.

Anmerck. 644. Um zu erkennen, welche Decimal-Brüche gleichnahmig seyn, wie auch auf einmahl zu sehen, was die kleinste Austheilung einer langen Decimal-Zahl betrage, setzet man an ihr Ende einen halben Mond, und in diesen die Ordnungs-Zahl der kleinsten zehnfachen Abtheilung, so deswegen die Kenn-Ziffer, oder characteristica genannt wird, als im vorigen Exempel setzet man 637 (2 allwo 2 die Kenn-Ziffer und hier Secunden bedeutet, nehmlich 6 Gantze und 37 Secunden, oder Hundert-Theile.

Zusatz. 645. Demnach haben die Gantzen zu ihrer Kenn-Ziffer (0 die Primen oder 10 Theil, (1, die Secunden oder 100 Theil, (2, die Tertien oder 1000 Theil (3 ꝛc. Nehmlich die Kenn-Ziffer hat iederzeit so viel Unitäten, als der vertheilte Bruchs-Renner Nullen, z. E. die tausendmahl tausend Theile, (partes millionesimæ) haben zu ihrer Kenn-Ziffer (6.

Eintheil. 646. Gleichwie aber die Zahlen in Ansehung ihrer Stellung dreyerley seyn, nehmlich Längen-Flächen- und Cörper-Zahlen, (s. 468.) Also giebt es auch dreyerley Primen, dreyerley Secunden ꝛc.

Erklär. 647. Eine Längen-Prime ist $\frac{1}{10}$ von einer ieden determinirten Länge, und wird insonderheit $\frac{1}{1}$ von einer Ruthe ein Decimal-Schuch, $\frac{1}{10}$ von einem Schuch ein Decimal-Zoll, und $\frac{1}{10}$ von diesem Zoll ein Decimal-Gran genennet, als 27, 135 (3 bedeutet 27 Ruthen, 1 Schuch, 3 Zoll, und 5 Gran, oder zusammen 27135 Gran.

Die gewöhnliche Ruthe ist $7\frac{1}{2}$ Leipziger Ellen und 2 Zoll lang.

648.

648. Eine Quadrat-Fläche ist ein gleichseitig rechtwincklicht Vier-Eck, so einerley determinirte Länge zu ieder Seite hat. Insonderheit ist eine Quadrat-Ruthe dergleichen Vier-Eck, das eine Ruthe lang und breit ist; Ein Quadrat-Schuch, der einen Schuch lang und breit, und ein Quadrat-Zoll, der einen Zoll lang und breit ist ꝛc. Erklär.

649. Wennnun eine Quadrat-Ruthe auf einer Seite mit 10 Quadrat-Schuhen besetzet, und ieder pro Unitate genommen wird, so kan man mit 10 solchen Reihen, (das ist 100 Quadrat-Schuhen) die gantze Quadrat-Ruthe ausfüllen, wie denn eben auf diese Art die Seite eines Quadrat-Schuches mit 10 Quadrat-Zollen, und folglich seine gantze Fläche mit 100 Quadrat-Zollen kan besetzet werden, u. s. w. (*s.* 468.) Zusatz.

650. Demnach ist eine Quadrat-Prime ein ablanges Vier-Eck, so eine Ruthe oder 10 Schuch lang, und nur einen Schuch breit ist, wird sonsten auch eine Riemen-Ruthe genannt. Eine Quadrat-Secunde ist ein Quadrat-Schuch. Eine Quadrat-Tertie, ein Riemen-Schuch, (so nehmlich einen Schuch lang und nur einen Zoll breit ist.) Eine Quadrat-Quarte ist ein Quadrat-Zoll, eine Quadrat-Quinte ist ein Riemen-Zoll, (so einen Zoll lang, aber nur einen Gran breit ist,) eine Quadrat-Sexte ist ein Quadrat-Gran ꝛc. * Erklär.

---

* Hiervon schreibt Jo. Laurenbergius in s. Gromatica Cap. 6. §. 4. Pertica si extendatur in latum, usque dum Quadrati faciem expleat, superficiem inde enatam, quaquaversus æqualem, Plæsium, πλάισιον, vocamus, cujus Area Plethrum centum pedes constratos comprehendit. Latus autem unum Plæsii, in denos pedes exporrectum, Petalum seu Tabula, λοπὰς recte appellabitur. Porro Pes Geometricus uti per denas partes componitur, ita in totidem etiam dissolvitur, singulæque denæ Pollicem efficiunt; & hac ratione Pes quadratus centum cluditur Pollicibus. Palmula autem seu ἰμάντιον, est pedis quadrati decima Portio in gracilitatem speciemque

Z. E. 13425796 (6 spricht man nach Flächen-Maaß also aus: 13 Quadrat-Ruthen, 4 Riem-Ruthen, 2 Quadrat-Schuch, 5 Riemen-Schuch, 7 Quadrat-Zoll, 9 Riemen-Zoll, und 6 Quadrat-Gran.

Anmerck. 651. Weil aber 100 Quadrat-Schuch eine Quadrat-Ruthe, und 100 Quadrat-Zoll einen Quadrat-Schuch machen (§. 649.) u. s. w. so sprechen die neuern Geometræ das Flächen-Maaß gerne zu Paaren aus, und behalten hiemit nur die auf einander folgenden Nahmen des Länges-Maaßes: Als vorige Zahl giebt im Superficial-Maaß, 13 Quadrat-Ruthen, 42 Quadrat-Schuch, 57 Quadrat-Zoll und 96 Quadrat-Gran, oder zusammen 13 Millionen 425 tausend und 796 Quadrat-Gran.

Erklär. 652. Ein würflichter Cörper ist ein gleichseitiger von 6 Quadraten zusammen gesetzter Würffel, der nach einerley determinirten Maaß eben so lang, als breit und dicke ist. Insonderheit ist eine Cubic-Ruthe dergleichen Würffel, der eine Ruthe lang, breit und dicke ist. Ein Cubic-Schuch, der einen Schuch, und ein Cubic-Zoll, der einen Zoll lang, breit und dicke ist, ꝛc.

Anmerck. 653. Daferne nun eine Cubic-Ruthe auf ihrer viereckigten Grund-Fläche mit 100 Cubic-Schuhen besetzt, und ieder pro Unitate genommen wird, so kan man mit 10 solchen Schichten, (das ist mit 1000 Cubic-Schuhen) die gantze Cubic-Ruthe ausfüllen, (§. 468.) Und eben auf solche Manier kan man die Grund-Fläche eines Cubic-Schuchs mit 100 Cubic-Zollen besetzen, und folglich aus 1000 Cubic-Zollen den gantzen Cubic-Schuch componiren, und so weiter.

---

corrigiæ extensa. At vero accuratiora etiam magisque exigua segmenta adhibet Artificum curiositas, unumque pollicem quadratum in Lacinias seu Lamellas decem, & hæc rursus in dena Sitaria dividit; Sic ut Pollex Quadratus sitaria centum contineat.

654.

654. Demnach ist eine Cubi-Prime eine vier-eckigte Schicht, so eine Ruthe lang und breit, aber nur einen Schuch dicke ist, wird von einigen auch eine Schacht- oder Schicht-Ruthe genennet. Eine Cubic-Secunde ist ein länglichter Balcken, so eine Ruthe lang, aber nur einen Schuch breit und dick ist. Eine Cubic-Tertie ist ein Cubic-Schuch. Eine Cubic-Quarte ist ein Schacht-Schuh, der einen Schuch lang und breit, aber nur einen Zoll dicke ist. Eine Cubic-Quinte ist ein kleiner Balcken, so einen Schuch lang, aber nur einen Zoll breit und dick ist. Eine Cubic-Sexte ist ein Cubic-Zoll, und eben auf die Art kan man mit denen übrigen kleinern Maasen verfahren. Z. E. 24, 371829 (6 betragen nach Cörper-Maaß: 24 Cubic-Ruthen, 3 Schacht-Ruthen, 7 Balcken-Ruthen, 1 Cubic Schuch, 8 Schacht-Schuch, 2 Balcken-Schuch, und 9 Cubic-Zoll. * Zusatz.

655. Indem aber 1000 Cubic-Schuch eine Cubic-Ruthe, und 1000 Cubic-Zoll einen Cubic-Schuch ꝛc. ausmachen, (§. 653.) so spricht man heut zu Tage das Cörper-Maaß gerne zu drey und drey Zahlen aus, und behält dabey nur die Nahmen des Langes-Maases, als vorige Zahl giebt im Cörper-Maaß 24 Cubic-Ruthen, Zusatz.

* Laurenbergius l. c. pag. 18. Decem pedes Cubici in directum digesti, longiusculum constituunt corpus, seu parallelepipedon prisma, quod Asser, seu δοκίς vocabitur, quia trabis seu transtilli imitatur figuram. Decem autem horum Asserum, seu cubici pedes centum in quadrum strati, Scutulam, πλίνθον efficiunt. Cujusmodi figuram habent lateres cocti, seu tegulæ pavimento sternendo adhiberi solitæ. Ulterius, ex decem scutulis κατ' ἁφάρμοσιν compositis, Pertica Cubica generatur, numerans in sua soliditate Asseres centum, seu Cubos mille. Porro Pes cubicus in millenas Tessellas scinditur, quarum denæ singulæ Trabecularum nomine venire possunt, & ϛῶμιχες appellari. Quodsi decem Trabeculæ coassatione laterali compingantur, Plinthium seu Laterculum producunt, cujus crassities unam, longitudo ac latitudo denas, totaque amplitudo centum complectitur Tessellas.

371 Cubic-Schuch, und 829 Cubic-Zoll, oder zusammen 24 Millionen 371 tausend 829 Cubic-Zoll.

Anmerck. 656. Es lässet sich zwar aus der Natur der ausmeßlichen Grösse von selbsten erachten, ob es Längen- Flächen- oder Cörper-Maaß seyn müsse, iedoch ist es nicht unbequehm, wenn man die Kenn-Ziffer des Längen-Maases mit einer schlechten Lunula, des Flächen-Maases, mit einer Lunula darüber 2, und des Cörper-Maases mit einer Lunula, darüber 3 stehet, distinguiret. Denn alsdenn lassen sich die Decimal-Zahlen gar kenntlich schreiben und aussprechen. Z. E. 19,2965 (4 sind 19 Ruthen, 2 Schuch, 9 Zoll, 6 Gran und 5 Scrupel, oder 192965 Scrupel.

^{2}
173,2468 (4 sind 173 Quadrat-Ruthen, 24 Quadrat-Schuch, 68 Quadrat-Zoll, oder 1732468 Quadrat-Zoll.

^{3}
8,394156 (6 sind 8 Cubic-Ruthen, 394 Cubic-Schuch, 156 Cubic-Zoll, oder 8394156 Cubic-Zoll.

Also sind $3.0052\,(4 = \frac{3^{52}}{10000}$ oder 3 Ruthen, 5 Gran, 2 Scrupel.

$15,000012\,(6 = \frac{15,^{12}_{2}}{1000000}$ oder 15 Quadrat-Ruthen und 12 Quadrat-Gran.

$7\underset{\smile}{000008}\,(6 = \frac{7\,^{8}_{3}}{1000000}$ oder 7 Cubic-Ruthen und 8 Cubic-Zoll.

Oder es ist auch gar bequehmlich mit dem Herrn Prof. Halio die pedes und digitos vermittelst kleiner Buchstaben als exponentes Dignitatum oben anzuhengen, z. E.

z. E. 5432^{d} bedeutet 5432 Zoll, 1256^{qd} sind 1256 Quadrat-Zoll, 1624^{cd} 284 sind 1624 Cubic-Zoll, und 284 Cubic-Gran, u. s. w. *

60. Aufgabe.

657. Eine iede Zahl in eine verlangte Decimal-Zahl zu verwandeln. 60. Aufgabe.

1.) Sind es gantze Zahlen, und sollen auf Primen, Secunden, Tertien ꝛc. das ist auf 10 Theil, 100 Theil, 1000 Theil ꝛc. reducirt werden, so setze man so viel Nullen hinan, als es die Kenn-Ziffer nach ihren Unitäten erfordert, als 5 Thl. auf Tertien oder tausend Theil des Thl. thun 5 000 Thl. 12 Quadrat-Ruthen in Quadrat-Sexten thun 12.000000. (s. 645.)

2.) Sind es Brüche, so verfahre man nach der 30 Aufgabe s. 367. Als $7\frac{3}{8}$ (z. E. 7 Thl. 9 Gr.) auf 1000 Theile gesetzet, sind erst 7.000, hernach sind $\frac{3}{8} = (\frac{3000}{8}) : 1000 = 375$, folglich $7\frac{3}{8} = 7.375$. Auch giebt $\frac{1}{400}$ auf 10000 Theile resolvirt 0025. Gleichergestalt thun 213 (1 auf Scrupel reducirt 213000(4.

3.) Sind es surdische Zahlen, so extrahire man aus ihnen die Wurtzel per approximationem, wie oben (s. 538.) allbereit gemeldet worden, z. E. V2 in Deci-

* Vid. Herrn Prof. Hasii Pithometriæ s. Doliorum Mensuræ Theoria Nova Algebræ ope erutæ & perfectæ Viremb. 1723.

mal-

mal-Quinten ist = 1. 41421, bey nahe. Wie denn von dergleichen Extractionen und ihren Vortheilen in folgenden §. 667. seq. mit mehren soll gehandelt werden.

Zusatz. 658. Also kan man auch umgekehrt die Decimal-Brüche auf andere, gemeine und ihre Gantze reduciren, wenn man die angesetzten Nullen wieder abschneidet, z. E. 21. 3000 (4 auf Primen, geben 21. 3 (1

12. 00 0000 ^{2}(6 oder Quadrat-Sexten geben 12 Quadrat-Ruthen.

Desgleichen geben $\underline{3750}$ oder $\frac{3750}{10000}$ durchs Aufheben:

(10	(5	(5	(5
3750	375	75	15
10000	1000	200	40

Wiederum $\frac{3}{8}$ u. s. w. (§. 360.)

61. Aufgabe.

61. Aufgabe.

659. Die Decimal-Zahlen zu addiren.

Man setze gleiche unter gleiche, addire wie gewöhnlich, und setze hinter die Summe die gröste Kenn-Ziffer.

Oder man fülle die leeren Plätze mit Nullen aus, so bekommen alle addendi einerley Kenn-Ziffer, (§. 657.) welche man zuletzt auch hinter das Aggregat schreibet.

z. E.	3,4521 (4	Oder:	15.0048 (4
	17.67		3.2400
	4.5		5.0000
	6 94		0.7200
Summa	325621 (4		23.9648 (4

660.

660. Vermittelst solcher Decimal-Expressionen lassen sich nicht allein allerhand Brüche, sondern auch surdische Zahlen, (daraus man nach dem 538 §. wie auch dem folgenden 667. die Wurtzel durch Näherung gezogen,) gar füglich addiren, welches sonsten nach gemeiner Art nicht so leicht angienge, als man addire Anmerck.

$19\frac{1}{3}$ = 19.33333(5
$11\frac{1}{2}$ = 11.5
$\frac{7}{25}$ = 00.28
V2 = 1.41421
V(3-V2) = 1.25928

Summa: 33.78682(5 beynahe.

62. Aufgabe.

661. Die Decimales von einander zu subtrahiren. 62. Aufgabe.

Wie gewöhnlich subtrahire man gleiches vom gleichen, und setze an den Rest die gröste Kenn-Ziffer: Als von

53.725(3 Oder: 74.5100^{2}(4
Subtr. 28.16 36 0000

Rest: 25.565(3 Rest: $38\ 5100^{2}$(4

Auf gleiche weise kan man auch Gantze und Brüche, und surdische Zahlen, nachdem man sie in Decimal-Expressiones verwandelt, so viel zur Praxi nöthig, gar bequehmlich von einander subtrahiren.

63. Aufgabe.

662. Die Decimal-Zahlen mit einander zu multipliciren. 63. Aufgabe.

Man

Man setze die Factores neben einander, und multiplicire sie wie in der gemeinen Multiplication, hinter das Product aber schreibe man die Summe der Kenn-Ziffern, so beyde Factores hatten. Z. E.

234 (0	⌊086 (3
86 (2	25 (1
1404	430
1872	172
201,24 (2	⌊2150 (4

Beweiß.

Die Decimal-Zahlen sind Brüche, und wenn Gantze dabey, sind sie Affter-Brüche, (Fractiones impropriæ) §. 643. Derowegen muß man so wohl die Zehler, als Renner in einander multipliciren. (§. 371.) Die Renner aber haben so viel Nullen, als die Kenn-Ziffern Unitäten, (§. 645.) Dahero darff man nur aus dem Haupt-Facto so viel Stellen abschneiden, als die Summe der Kenn-Ziffern anzeiget.

Uberhaupt, wenn $d = 10$ $d^2 = 100$ $d^3 = 1000$ &c.

so giebt $\frac{a}{d^3}$ multiplicirt mit $\frac{c}{d^2}$ im Product $\frac{ac}{d^5}$ und

$$\frac{a}{dm} \cdot \frac{c}{dn} = \frac{ac}{dm+n}$$ (§. 371. und 235. 3.)

Zusatz. 663. Demnach muß die Kenn-Ziffer einer Decimal-Quadrat-Zahl allezeit ein numerus par seyn, (§. 248.) Als so $a(n$ multiplicirt wird mit $a(n$ ist das Factum $aa(2n$. Diejenige eines Cubi muß mit 3 und eines Quadrato-Quadrati mit 4 divisibel seyn ꝛc. Folglich muß man zum Quadrat-Zahlen die Nullen paarweiß, zum Cubis 3 und 3, zum Biquadratis 4 und 4 auf einmahl hinan setzen, wenn man sie auf einen höhern Grad bringen will.

664.

664. Offters braucht man nicht alle Decimal-Brüche, sondern nur etliche. Als 32.415 mit 6.732 multiplicirt, giebt über die Gantzen auch noch Decimal-Sexten; So iemand aber nur die Secunden davon haben wolte, der bediene sich Oughtreds Compendii: * Anmerck.

Nehmlich man setze den umgekehrten Multiplicatorem (hier, weil man nur Secunden verlanget,) unter die zweyte Bruchs-Ziffer des Multiplicandi, multiplicire mit ieder Ziffer des Multiplicatoris so viel vom Multiplicando als sie erreichet, iedoch rechne man bey iedem Anfang so viel dazu, als man sonsten vorhero hätte im Sinne behalten müssen, und setze alle Facta partialia grade unter einander, so erspahret man nicht nur ein ziemliches in der Multiplication, sondern auch in der Addition:

Als:		Mühsam stünde es also:	
32.415		32,415	
23.76		6,732	
19449		6	4830
2269		97	245
97		2269	05
6		19449	0
Facit:	218.21		218211/7780

Der Beweiß gründet sich auf den schieffen Untersatz in der Multiplication, von welchem die unbrauchbarn letzten Ziffern ohnedem allezeit abgeschnitten werden, wenn man mit 1000, 10000 ꝛc. hinein dividiret. (§. 151.)

64. Aufgabe. 64. Aufgabe.

665. Die Decimales in einander zu dividiren.

* Dergleichen und mehrere Exempel davon besehe man in Oughtreds Clavi Mathematicæ denuo limata. pag. 8. seq. wie sich denn dieses Vortheils Benj. Ursinus in s. Trigonometrie pag. 167. seqq. mit gutem Nutzen bedienet hat.

Die Ansetzung des Dividendi und Divisoris, wie auch die Operation geschiehet wie sonst, nur daß man ihre Kenn-Ziffern mit dazu setzet. Denn beyder Differenz giebt die Kenn-Ziffer des Quoti. Als:

Divid. 1464402(5|3.21(2
9586 Quotus.
45
Divis. 4562 (3
13686
9124
4562

1464402

Beweiß.

So man mit $\frac{a}{d^3}$ in $\frac{ab}{d^5}$ dividiret, kommt $\frac{b}{d^2}$. Oder überhaupt, wenn man mit $\frac{a}{d^n}$ in $\frac{ab}{d^{m+n}}$ dividiret, kommt $\frac{b}{d^m}$ (§. 372. c. und 240. 2.)

Woraus gar deutlich zu sehen, daß die Kenn-Ziffer des Divisoris von des Dividendi seiner zu subtrahiren, wenn man die characteristicam Quoti haben will.

Anmerck. 666. Dafern nach der Division nicht alles aufgehet, und der Quot etwas genauer verlangt wird, so erhebe man den Dividendum mit einigen Nullen auf so viel Grad weiter, als man den Quotum näher begehrt (§. 657.) und procedire wie zuvor. Oder man gebrau-

brauche Wallisii Compendium, * da er den Divisorem nach geendigter Division noch immerzu unter dem Residuo fortsetzet, und wenigstens mit seinen anfänglichen Ziffern fernerweit darein dividiret, wodurch man also den Quotum ohne viel Mühe um etliche Decimal-Brüche schärffer bekommt, obschon dessen allerletzte Ziffer ungewiß bleibet: Als 2846498 (0 mit 81225 (0

```
                                                    416
                                                   3595
                                                  34270 1
                                                  46842 4
                                                  89725 00
                                                 416084324
2846498.00 (35.0446 (4                          812225555
 812225                                          8122224
  81222                                           812224
   8122                                            81224
    812                                             8122
     81                                              812
      8                                               81
```

Nehmlich, weil man zum Dividendo zwey Nullen gesetzet, (oder ihn auf den andern Grad, das ist: 100 Theile erhoben hat,) und nach geendigter Division den Divisorem von vorne her, so weit er nehmlich gereichet hat, noch 2 mahl untergeschrieben, ist es so viel, als hätte man noch 2 Nullen am Dividendo angehenget, und deshalber muß man im Quotienten 4 abschneiden.

---

* Vid Wallisii Treatise of Algebra Chap. VIII. of Decimal-Fractions pag. 26. Und schreibet Oughtred in s. Clavi p. 14 davon: Pulcherrima hæc est Divisionis contractio, & maximi usus in Computationibus Astronomicis.

65. Aufgabe.

65. Aufgabe.

667. Aus einer Decimal-Zahl die begehrte Wurtzel zu ziehen.

So es nöthig, erhebe man sie auf so viel Grad weiter, als man die Wurtzel näher begehret, iedoch allezeit so weit, daß ihre Kenn-Ziffer mit dem Exponenten der gegebenen Potentz divisibel werde, (§. 663.) Alsdann extrahire man die Wurtzel, wie oben (im 532, 538, 550. 557. §.) angewiesen worden. Endlich die characteristicam Radicis zu bekommen, dividire man die Kenn-Ziffer der erhobenen Decimal-Zahl mit dem Exponenten von solcherley Potentz.

Z. E. So man aus 300 Quadrat-Ruthen, oder einem so genannten Acker Feld, die Wurtzel oder Seite seines Quadrats erfinden wolte, erhebe man ihn auf 30000 Quadrat-Schuhe (§. 657.) so giebt die Wurtzel nach Längen-Maaß 17.3 Quadrat-Schuhe, und noch was drüber. (§. 532.)

Will man sie genauer haben, so erhebe die 300. □ Ruthen auf Quadrat-Gran, daß ist auf (300.000000(6) Quadrat-Sexten. (§. 650.) so giebt solch Quadrat nach gehöriger Extraction, oder nach Ludolphi Tetragonometrie, vor die gesuchte Seite 17.320 (3 Gran, oder Längen-Tertien.

Vortheil.

668. Indem aber durch die Hinansetzung so vieler Nullen die Extraction (sonderlich der höhern Wurtzeln) immer schwehrer und verdrießlicher wird, so bediene man sich des Herrn Halley Methode, * als wordurch die Wurtzeln ohne weiteres Extrahiren so scharff gefunden, als sie verlanget werden, und mag diese aus folgenden zwey Exempeln gar leicht zu erlernen stehen:

* In Transact. Anglican. No. 210. pag. 136.

I. Man

I. Man setze die Quadrat-Wurtzel auf 300.00 sey $= 173 + y$ so multiplicire man sie quadratisch, kommt

$29929 + 346y + y^2 = 300.00$ (§. 263.)
$299\,29$ subtr.

Und $346y + y^2 = 71$ (§. 633.)

Weil aber das Quadrat eines Bruchs iederzeit weniger als eine Unität giebt (s. 96.) so kan man das Quadrat y^2 ohne mercklichen Fehler hinweg lassen, und sind dahero

$346y = 71$

folglich $y = \frac{71}{346}$ (s. 637.) $= \frac{205}{1000}$ (s. 657.)

Derowegen ist $(300.00\,00\,00\,00)^{1:2} = 17.3205$. (§. 667.)

Will man damit noch nicht zufrieden seyn, so setze man die Radix sey $= 173205 + y$, dann ist

$29999972025 + 346410y + y^2 = 30000000000$

Und $346410y = 27975$ (nach vorhergehenden)

folglich $y = \frac{27975}{346410}$ (§. 637.)

$= \frac{80756}{1000000}$ (§. 657.)

Demnach ist die Quadrat-Wurtzel aus 300. Quadrat-Ruthen

$= 17.32050\,80756$ (10 Oder auch
$\sqrt{3} = 1.73205\,80756$. so genau genug ist.

II. Es sey $\sqrt[3]{2}$ in Decimal-Zahlen zu determiniren, so extrahire man aus 2000000 Decimal-Sexten die Cubic-Wurtzel, dann giebt sie 125 Decimal-Secunden. (§. 667.) Weil aber nicht alles aufgehet, setze man, es sey die genauere Wurtzel $= 125 + y$, so wird sie cubisch multiplicirt, (nach s 491.)

$$1953125 + 46875y + 373y^2 + y^3 = 2000000$$
$$\text{Subtr.} \quad 1953125$$

Und $373y^2 + 46875y = 46875$

Wenn man nehmlich den Bruchs-Cubum y^3 weglässet, indem er nichts merckliches ausmachet, wie im vorhergehenden bey dergleichen Bruchs-Quadrate schon erinnert worden.

Demnach ist $y^2 + 125y = 125$ (§. 637.) Und weil aus $y^2 + 125y$ nach geschehener Extraction des Quadrat von halb 125, nehmlich 3905.25 noch fehlet, (§. 640.) so addire man es beyderseits dazu, kömmt

$$y^2 + 125y + 390625 = 4031.25 \quad (\S. 632.)$$

Erhebet man 4031.25 auf Octaven, kommen

$$y^2 + 125y + 390625 = 4031.25000000$$

und ist $y + 62.5 = 634921$ (§. 639. 640.)
nach s. 633 subtr. 62.5.

folglich kömmt $y = .9921$, also daß die Cubic-Wurtzel aus $2 = 1.259921$, so schon zulänglich.

Practischer Nutzen der Decimal-Zahlen.

669. Es hat schon Herr Ed. Wels gezeiget, daß die Verwandlung der benannten in Decimal-Zahlen von einem guten Nutzen sey, * und damit ich zu ihrer practischen Application auch etwas noch möchte beytragen, so habe in folgender Tabelle die Groschen und Pfennige auf 10000000, oder zehn Millionen-Theile des Reichs-Thalers reducirt:

* Vid. Ed. Welsii Elem. Arithm. pag. 119. seq.

Gr.

Gr.	Pf.	Part. Decm.	Gr.	Pf.	Part. Decim.	Gr.	Pf.	Part. Decim.
0	1	.0034722	2	9	.1145833	5	5	.2256944
0	2	.0069444	2	10	.1180555	5	6	.2291666
0	3	.0104166	2	11	.1215277	5	7	.2326388
0	4	.0138889	3	0	.1250000	5	8	.2361111
0	5	.0173611	3	1	.1284722	5	9	.2395833
0	6	.0208333	3	2	.1319444	5	10	.2430555
0	7	.0243055	3	3	.1354166	5	11	.2465278
0	8	.0277778	3	4	.1388888	6	0	.2500000
0	9	.0312500	3	5	.1423610	6	1	.2534722
0	10	.0347222	3	6	.1458333	6	2	.2569444
0	11	.0381944	3	7	.1493055	6	3	.2604166
1	0	.0416666	3	8	.1527777	6	4	.2638888
1	1	.0451388	3	9	.1562500	6	5	.2673610
1	2	.0486110	3	10	.1597222	6	6	.2708332
1	3	.0520832	3	11	.1631944	6	7	.2743054
1	4	.0555555	4	0	.1666666	6	8	.2777777
1	5	.0590277	4	1	.1701388	6	9	.2812500
1	6	.0625000	4	2	.1736111	6	10	.2847222
1	7	.0659722	4	3	.1770833	6	11	.2881944
1	8	.0694444	4	4	.1805556	7	0	.2916666
1	9	.0729166	4	5	.1840278	7	1	.2951388
1	10	.0763888	4	6	.1875000	7	2	.2986110
1	11	.0798610	4	7	.1909722	7	3	.3020832
2	0	.0833333	4	8	.1944444	7	4	.3055555
2	1	.0868055	4	9	.1979166	7	5	.3090277
2	2	.0902778	4	10	.2013888	7	6	.3125000
2	3	.0937500	4	11	.2048611	7	7	.3159721
2	4	.0972222	5	0	.2083333	7	8	.3194444
2	5	.1006944	5	1	.2118055	7	9	.3229166
2	6	.1041666	5	2	.2152777	7	10	.3263888
2	7	.1076388	5	3	.2187500	7	11	.3298610
2	8	.1111111	5	4	.2222222	8	0	.3333333

Gr.	Pf.	Part. Decim.	Gr.	Pf.	Part. Decim.	Gr.	Pf.	Part. Decim.
8	1	·3368055	10	9	·4479166	13	5	·5590277
8	2	·3402777	10	10	·4513888	13	6	·5625000
8	3	·3447499	10	11	·4548611	13	7	·5659722
8	4	·3472221	11	0	·4583333	13	8	·5694444
8	5	·3506943	11	1	·4618055	13	9	·5729165
8	6	·3541666	11	2	·4652778	13	10	·5763888
8	7	·3576388	11	3	·4687500	13	11	·5798611
8	8	·3611111	11	4	·4722222	14	0	·5833333
8	9	·3645833	11	5	·4756944	14	1	·5868055
8	10	·3680556	11	6	·4791666	14	2	·5902777
8	11	·3715278	11	7	·4826388	14	3	·5937500
9	0	·3750000	11	8	·4861110	14	4	·5972222
9	1	·3784722	11	9	·4895832	14	5	·6006944
9	2	·3819444	11	10	·4930556	14	6	·6041666
9	3	·3854166	11	11	·4965278	14	7	·6076388
9	4	·3888888	12	0	·5000000	14	8	·6111111
9	5	·3923610	12	1	·5034722	14	9	·6145833
9	6	·3958332	12	2	·5069444	14	10	·6180555
9	7	·3993054	12	3	·5104166	14	11	·6215277
9	8	·4027777	12	4	·5138888	15	0	·6250000
9	9	·4062499	12	5	·5173611	15	1	·6284722
9	10	·4097222	12	6	·5208333	15	2	·6319444
9	11	·4131944	12	7	·5243055	15	3	·6354165
10	0	·4166666	12	8	·5277777	15	4	·6388888
10	1	·4201388	12	9	·5312499	15	5	·6423610
10	2	·4236111	12	10	·5347221	15	6	·6458332
10	3	·4270833	12	11	·5381944	15	7	·6493055
10	4	·4305555	13	0	·5416666	15	8	·6527777
10	5	·4340277	13	1	·5451388	15	9	·6562500
10	6	·4375000	13	2	·5486111	15	10	·6597222
10	7	·4409722	13	3	·5520833	15	11	·6631944
10	8	·4444444	13	4	·5555555	16	0	·6666667

Gr.	Pf.	Part. Decim.	Gr.	Pf.	Part. Decim.	Gr.	Pf.	Part. Decim.
16	1	.6701389	18	9	.7812500	21	5	.8923610
16	2	.6736111	18	10	.7847222	21	6	.8958332
16	3	.6770833	18	11	.7881944	21	7	.8993054
16	4	.6805555	19	0	.7916666	21	8	.9027777
16	5	.6840277	19	1	.7951388	21	9	.9062500
16	6	.6874999	19	2	.7986110	21	10	.9097222
16	7	.6909722	19	3	.8020832	21	11	.9131944
16	8	.6944444	19	4	.8055555	22	0	.9166667
16	9	.6979166	19	5	.8090277	22	1	.9201389
16	10	.7013888	19	6	.8124999	22	2	.9236111
16	11	.7048610	19	7	.8159721	22	3	.9270833
17	0	.7083333	19	8	.8194444	22	4	.9305555
17	1	.7118055	19	9	.8229166	22	5	.9340277
17	2	.7152777	19	10	.8263888	22	6	.9375000
17	3	.7187499	19	11	.8298610	22	7	.9408722
17	4	.7222222	20	0	.8333333	22	8	.9444444
17	5	.7256944	20	1	.8368055	22	9	.9479166
17	6	.7291666	20	2	.8402777	22	10	.9513888
17	7	.7326388	20	3	.8437499	22	11	.9548611
17	8	.7361111	20	4	.8472222	23	0	.9583333
17	9	.7395833	20	5	.8506944	23	1	.9618055
17	10	.7430555	20	6	.8541666	23	2	.9652777
17	11	.7465277	20	7	.8576388	23	3	.9687499
18	0	.7500000	20	8	.8611111	23	4	.9722222
18	1	.7534722	20	9	.8645833	23	5	.9756944
18	2	.7569444	20	10	.8680555	23	6	.9791666
18	3	.7604166	20	11	.8715277	23	7	.9826388
18	4	.7638888	21	0	.8750000	23	8	.9861111
18	5	.7673600	21	1	.8784722	23	9	.9895833
18	6	.7708332	21	2	.8819444	23	10	.9930556
18	7	.7743054	21	3	.8854166	23	11	.9965278
18	8	.7777778	21	4	.8888888	24	0	10000000

Gebrauch voriger Tabellen.

670. Der Gebrauch hiervon ist so wohl in der Multiplication als Division der benahmten Zahlen gar leichte. Denn da darff man nur die Gr. und Pf. aus der Tabelle zu denen Thl. hinan schreiben, vom Facit die Thl. mit 7 Ziffern wieder abschneiden, und die abgeschnittenen in der Tabelle aufsuchen, so stehen die Gr. und Pf. gegen über. Z. E. Man multiplicire 4 Thl. 17 Gr. 11 Pf. mit 37.

Das ist, so man 17 Gr. 11 Pf. aus der Tabelle im Decimal-Theilen nimmt, und an die 4 Thl. schreibet, kommt:

4.7465277
(37
33 2256939
142395831

Facit: 175.6215249.

Nehmlich 175 Thl. 14 Gr. 11 Pf.

Auf gleiche weise läsfet sichs auch gar bequehmlich dividiren: Als 175 Thl. 14 Gr. 11 Pf. in 37 Theile getheilet, das ist, so man statt der 14 Gr. 11 Pf. ihren Decimal-Bruch nimmt, und an die 175 Thl. hinan schreibt, kömmt:

175 6215277 (4.7465277
577490888
37) 26564477 Fac. 4 Thl. 17 Gr. 11 Pf.
1211222

Anmerck.

671. Wie man im folgenden bald sehen wird, bestehen die Proportion-Reguln meist im multipliciren und dividiren. Daher wird dieser Decimal-Ansatz ratione der Thl. Gr. und Pf. auch darinne können genutzet werden. Und also könnte man auch andere Müntz- Maaß- und Gewichts-Sorten auf dergleichen Art resolvi-

solviren, wo es beliebig wäre, wie dann der P. Franciscus Noël in seinen Mathematisch-Physicalischen Observationibus in India und China c. 7. pag. 104. mit angemercket, daß die Sineser so wohl ihre Maase, als Gewichte auch nach der Decimal-Abtheilung eingerichtet.

3. Von der Verwandlung der Müntzen, Maase, und Gewichte.

66. Aufgabe.

66. Aufgabe.

674. Die grössern in die kleinern zu verwandeln.

1.) Erfahre man aus dem Valore, aus der GegeneinanderMessung, oder Abwägung, (oder auch aus denen Tabell. s. 684. seq.) wie viel gleiche Theile der kleinern, die grössere mehr ist, als die kleinere. Z. E. 1 Thl. ist um $\frac{1}{2}$ Käyser-Gulden mehr denn 1. Käyser-Gulden, 1 Sp. Duc. ist um $\frac{7}{4}$ Thl. mehr denn 1 Thl.

2.) Mit diesen Theilen multiplicire man die gegebene Anzahl der Grössern, und addire das Factum, so kommt die gesuchte Anzahl der kleinern.

Z. E. Man reducire 1234 Thl. auf Käys. Gulden

$\frac{1}{2}$ 617 ($\frac{1}{2}$

Fac. 1851 Käys. Gulden.

Man verändere 312 Spec. Ducaten in Rthl.

78 7

546 4

Fac. 858 Rthl.

Wenn nach Cassini Observation * der Pariser-Schuch 16 gleiche Theile hat, so hält der Römische Architectoni-

* Eisenschmid de Pond. & Mensuris pag. 94.

sche

sche Palmus dergleichen Theile 11. Dahero ist ein Königl. Pariser Schuch = dem Röm. Palmo + 5/11 solches Röm. Palmi. (§. 255.) Nun verwandle man z. E. 232 Pariser Schuch in Röm. Palmos.

2 1 1 5

105.5 11

Fac. $337\frac{5}{11}$ Röm. Palmos.

Wenn das Amsterdammer oder Pariser Pfund 20 gleiche Theile hat, so hält das Leipziger Pfund dergleichen Theile 19. * Dahero ist z. E. das Amsterdammer Pf. = 1 Leipziger + 1/19 Leipziger Pf. (§. 255.) Wie viel thun demnach 154 Amsterd. Pf. Leipziger Pf?

154

$8\frac{2}{19}$ ($\frac{1}{19}$

Fac. $162\frac{2}{19}$ Leipziger Pfund.

Beweiß.

Es seyen die grössere Sorte = G, ihre gleichen Theile = b

die kleinere Sorte = k, und eben solcherley ihre Theile = c

Desgleichen sey b - c = d nehmlich der Differentz in solchen gleichen Theilen, so ist $G = k + \frac{dk}{c}$ (§. 255.)

Gesetzt nun die Anzahl der gegebenen grössern Sorte

* Cl. Combe dans le Negoce rendu facile pag. 449.

sey

sey $= a$, und die Anzahl der verlangten kleinern $= x$
so ist $aG = xk$, und $ak + adk = xk$ (§. 263.)

c

Folglich ist $a + ad = x$ (§. 637.)

c

67. Aufgabe.

675. Die kleinern Münzen Maase und Gewichte auf dergleichen grössere zu reduciren. 67. Aufgabe.

1.) Erfahre man, (wie im vorigen,) wie viel Theile der grösseren, die kleinere Sorte weniger ist, als die grössere.

2.) Mit diesen Theilen multiplicire man die gegebene Anzahl der kleinern, und subtrahire das Factum, so kömmt die gesuchte Anzahl der grössern.

Z. E. Man verwandle 184 Meiß. fl. in Rthl. Weil ein Meißn. fl. $= 1$ Rthl. $- \frac{1}{8}$ Rthl. so dividire man mit 8, und subtrahire den Quotum:

184
8) 23

Fac. 161 Rthl.

Denn 184 multiplicirt mit $\frac{1}{8} = \frac{184}{8} = 23$.
(§. 352.)

Man reducire 236. Pariser Schuch auf Venetianische Schuch.

Not. So der Pariser Schuch 72 gleiche Theile hat, so hält der Venetianische 77 dergleichen Theile, dahero ist

1. Pa-

1. Pariſ. Schuch $\frac{5}{77}$ = 1. Ven. Schuch - Ven. Schuch.

Man multiplicire dieſe Gleichung beyderſeits mit 236, kommen

236 Pariſer Schuch $\frac{1180}{77}$ = 236 Venetianiſche Schuch - Venetianiſche Schuch

welche (in Gantzen) $\frac{25}{77}$ = 15 Ven. Schuch, dieſe ſubtr.

$\frac{52}{77}$

Fac. 220 Ven. Schuch.

Wenn ein Leipziger Pfund 102 gleiche Theile hat, ſo hält ein Hamburger Pfund dergleichen 105 Theile, * wie viel machen demnach 348 Leipziger Pfund an Hamburger Gewicht?

1. Leipziger Pf. = 1. Hamb. Pf. - $\frac{3}{105}$ Hamb. Pf.

Man multiplicire mit 348 kommen

348. Leipz. Pf. = 348. Hamb. Pf. - $\frac{1044}{105}$ Hamb. Pf.

$$-\frac{1044}{105} = -9\frac{99}{105}$$

Fac. $338\frac{6}{105}$

Beweiß.

Es ſey die kleinere Sorte = k, und ihre gleiche Theile = c
die gröſſere = Gl, und eben ſolcherley ihre Theile = 6

* Claire - Combe loc, cit.

Auch

Auch sey $b - c = d$, nehmlich beyder Theile Differentz.

$$\text{So ist } 1\,k = 1\,G - \frac{d}{b}\,G \quad (\S.\,256)$$

Diese Gleichung multiplicire man beyderseits mit der gegebenen Anzahl der kleinern Theile $= a$, kommen

$$a\,k = a\,G - \frac{ad}{b}\,G \quad (\S.\,263.)$$

676. Es werden zwar dergleichen Reductiones insgemein durch die Proportion-Regul verrichtet, und sollen im folgenden Capite auch einige Exempel davon gegeben werden. Allein wenn die Difference aus einem eintzeln oder sonst leichten Bruch bestehet, ist diese Manier viel bequehmer, und hat man dabey noch den Vortheil, daß zugleich der Abgang in der Grössern, und der Uberschuß in der kleinern Sorte mit zum Vorschein kömmt. Anmerck.

677. Die Gleichung, wornach eine gewisse Anzahl kleinerer Sorten der gefundenen Anzahl grösserer Sorten, und vice versa, gleich geschätzet wird, pflegt man sonsten auch das Pary zu nennen, sonderlich wenn es in kleinsten Zahlen exprimiret ist. Anmerck. und Erklär.

68. Aufgabe.

678. Aus dem gegebenen Gehalt zweyer Münzen, Maase, oder Gewichte das Pary zu finden.

Man multiplicire die vorhin gefundene Gleichung mit des Differentz-Bruchs Nenner, so kommen auf beyden Seiten lauter gleiche Gantze. (§. 371. d. und 635.)

Z. E. Wenn 1 Thl. = 1 Meißn. fl. + $\frac{1}{7}$ M. fl. multipl.

man mit 7) kommen 7 Thl. = 7 M. fl. + 1 M. fl.

Nehmlich 7 Thl. = 8 Meiß. fl.

Wenn

Wenn 1 Thl. = 24 Gr. und 1 Sp. Duc. = 66 Gr.
so dividire man beyderseits mit 6, kommt
1 Thl. = 4 und 1. Spec. Duc. = 11.
(Orthsthalern) (§. 270.)
Dahero ist

$$1 \text{ Thl.} = 1 \text{ Spec. Duc.} - \frac{7}{11} \text{ Spec. Duc.}$$

(§. 256.) diese mit 11 multiplicirt.

geben 11 Thl. = 11 Spec. Duc. - 7 Sp. Duc.

das ist 11. Thl. = 4 Spec. Duc.

Vortheil. 679. Dahero stehet das Pary allezeit mit dem Gehalt verkehrt, deswegen man dann den Gehalt nur darf umkehren, so giebt solche Verwechselung das Pary, als:
1 Käys. Gulden ist gegen 1 Thl. wie 16 gegen 24
oder wie 2 gegen 3 dahero
thun 3 Keys. Gulden just 2 Thl.

69. Aufgabe.

69. Aufgabe. 680. **Wenn der Gehalt von einer Sorte nicht so gleich auf die verlangte, sondern vorher auf einige Zwischen-Sorten verglichen ist, dennoch die lezten Sorten auf die erste zu reduciren.**

1.) Man multiplicire die Zahlen in der ersten Reihe (nehmlich darinnen sich die gesuchte Sorte befindet) alle in einander, und was heraus kommt, multiplicire man noch mit der gegebenen Anzahl der lezten Sorte.

2.) Multiplicire man auch die Zahlen in der andern Reihe alle in einander, (nehmlich worunter die gegebene Sorte steht,) und dividire mit diesem Product in das vor-

vorhergehende, dann giebt der Quotus die Anzahl der ersten Sorte, so der gegebenen Anzahl von der letzten Sorte gleich ist. Z. E.

16. Röm. Architect. Palmi sind = 11. Pariser Schuch
77. Pariser Schuch = 72. Venet. Schuch
135. Venet. Schuch = 154. Englische Schuch
139. Englische Schuch = 150. Leipziger Schuch

Wie viel thun demnach 236. Leipziger Schuch Römische Palmos?

Man multiplicire 16 mit 77, das Factum mit 135, und dieses Factum mit 139, kommen 231 18480.

Dieses letzte Factum multiplicire man mit 236 kömmt im Haupt-Product: 5455961280.

Ferner multiplicire man 11 mit 72, was kömmt mit 154. und solch Factum mit 150, so kömmt das andere Product 1829520.

Mit diesem andern Product dividire man das Haupt-Product, so kommen im Quoto $298\frac{12}{55}$ Römisch-Architectonische Palmi, so denen gegebenen 236 Leipziger Schuhen gleich.

Beweiß.

Wenn $aP = bQ$
$cQ = dR$
$eR = fS$
und $gS = hT$, so ist zu beweisen, daß die Sorte T auf die Sorte P reducirt, nehmlich, wenn die gegebene Anzahl $= n$, daß $nT = \frac{acegnP}{bdfh}$.

Weil $aP = bQ$, so ist $\frac{aP}{b} = Q$ (§. 637.)

und $\frac{acP}{b} = cQ = dR$ (§. 263.)

Desgleichen ist $\frac{acP}{bd} = R$ und $\frac{aceP}{bd} = fS$.

Ferner $\frac{aceP}{bdf} = S$ und $\frac{acegP}{bdf} = gS = bT$.

Endlich $\frac{acegP}{bdfb} = 1T$.

Diese letzte Gleichung multiplicire man beyderseits mit der gegebenen Anzahl von T, nehmlich mit n,

kommen $\frac{acegnP}{bdfb} = nT$. (§. 263.)

Anmerck. 681. Wolte man eine gegebene Anzahl von der Sorte P auf T resolviren, so ist $\frac{bdfbnT}{aceg} = nP$. Nehmlich man darff sich nur einbilden, als hätte man den Ansatz derer Gehalte, oder die Pary verkehrt angeschrieben.

Vortheil. 682. Indem die Versetzung der efficientium das Factum nicht ändert (§. 273.) auch da der Gehalt des Pary nicht verändert wird, wenn man ihn beyderseits mit einer dritten Zahl aufhebt. (§. 270.) so erspahrt man viel Mühe, wenn man die Sätze zu beyden Theilen so lange aufhebt, als es müglich, und zuletzt nur die übergebliebenen aufgehobene Zahlen in einander multiplicirt.

Als im vorigen

8 : 16. Röm. Palmi = 11. Par. Schuch

7 : 77. Par. Schuch = 8 : 72. Ven. Schuch

9 : 27 : 135. Ven. Sch. = 11 : 77 : 154. Engl. Sch.

139. Engl. Sch. = 10 : 30 : 150. Leipz. Sch.

236

834

417

278

32804 (298 (2 | 12 Architect. Palmi.
24 / 110 | 55
110

110) 1092

11

683. Diese Aufgabe ist von grossem Nutzen, und bedienet man sich ihrer nicht allein in der zusammen gesetzten Müntz-Maaß- und Gewichts-Vergleichung, sondern es gebrauchen sie auch die Kauff-Leute, wenn sie so gleich wissen wollen, über welche Handels-Plätze sie nach gegebenem Wechsel-Cours ihre Gelder vortheilhaffter rouliren lassen. Von den Frantzösischen Arithmeticis wird sie la Regle Conjointe oder auch la Regle des Arbitrages genennet. * Anmerck.

684. I. Tabelle der vornehmsten Schuhe auf den Königlichen Pariser-Schuch reduciret. Nehmlich so der Pariser Schuch 1440 gleiche Theile hat, (das ist 12 Zoll, ieder Zoll 12 Linien, und iede Linie 10 particulas) so hält dieser Theile

* Man besehe hiervon Cl. Combe Nouvelle & Universelle Pratique d'Arithmetique pag. 298. seq.

Der Rheinländische - -	1391 † 3:10
Der Londensche - -	1350
Der Schwedische - -	1320
Der Dänische - - -	1403 † 2:5
Der Dantziger - -	1271 † 1:2
Der Cracauer - -	1580
Der Wienische - -	1420
Der Constantinopolitanische - -	1320
Der Venetianische - -	1540
Der Bononische - -	1682 † 2:5
Der Babylonische - -	1633
Der alte Römische, Statilii im Belvedere	1311
Cossutii in Hort. Matth. - -	1315
Der Griechische - -	1380
Der alte Hebräische - -	1590
Die Spanische Elle Vara de Castilia - -	3676
Der Lissaboner - -	1387
Der Straßburger - -	1282 † 3:4
Der Nürnberger - -	1347
Der gemeine Leipziger - -	1251
Der Leipziger Bau-Schuch - - -	1253.

Diese sind mehrentheils nach Auzouti, Picardi, Cassini, Bernardi, und Eisenschmidii Observationen angesetzet.

685. II. Tabelle von einigen Ellen, Schuhen und Palmis, wie sie der Käyserl. Architectus Bibiena in seiner Civil-Bau-Kunst angesetzet, * und mit des berühmten Mechanici Josephi Maccarii Tarifen übereinkommen, auf den Königl. Pariser Schuch zu 1000 Theilen, und deren angehengte Brüche gerechnet:

* Vid. Architettura civile preparata sú la Geometria di Ferd. Galli Bibiena, fol. 25. seq.

Nehm-

Nehmlich davon hält

Die Mäyländische Elle - -	1953 † 1:8
Die Ferrarische, zu Tüchern, - -	-
(und die Röm. Architect.) - -	2060
Diejenige zu Seiden: - -	1936
Modenesische Elle: - -	1936
1. Elle in Siena - -	1852 † 1:2
1. Elle in Lucca - -	1815 † 35:36
1. Elle in Florentz - -	1791 † 2:3
1. Elle in Parma - -	1754 † 1:6
1. Elle in Mantua - -	1436

Dergleichen Elle heist eigentlich Braccio.

Der Turinische Schuch - -	1579 † 1:6
Der Schuch in Pavia - -	1444 † 4:9
Der Mäyländische - -	1222 † 2:9
Der Bologuesische - -	1170 † 5:6
Der Lionische - -	1052 † 17:54
Der Königl. Pariser - -	1000
Der Dännemärckische - -	974 † 13:18
Der Leidensche - -	966 † 2:3
Der Griechische im Campidoglio -	943 † 1:18
Der Londen. deren 3 eine Engl. Gerte thun	938 † 5:144
Der Röm. (Cossutii) in Hort. Matth. -	913 † 7:36
Der Babylonische, oder halbe Cubitus Sacer -	1134
Der Genuesische Palmus - -	768
Der Röm. Palmus in Campidoglio -	686 † 11:24
Der alte Römische - -	924
Der Röm. (Statilii) in Belvedere - -	910 † 5:12
Der Römische Campidoglio - -	907 † 7:24
Der Brüsselsche - -	846 † 2:3
Der Palmus in Napoli - -	806 † 43:72
Der Spanische Palmus - -	654.

686. III. Tabelle von denen vornehmsten Pfunden in Europa, deren Anzahl einander durchaus gleich, aus Cl. Combe Negoce rendu facile pag. 448.

Pf.	
100.	in Amsterdam und Pariß.
105.	Antwerpen
108.	Alicante
22 1/2.	Rottes d' Aleppo
125.	Archangel
125.	Avignon
112.	Audenarde
103.	Augsburg
149.	Ancona
103.	Bremen
95.	Bergen und Norwegen
111.	Bern
125.	Breslau
83.	Catti di Battavia
98.	Basle
169.	Bergamo
100.	Beſançon
100.	Bourdeaux
151.	Boulogne
104.	Bourg
106.	Bruges
101.	Coppenhagen
125.	Coningsberg
104.	Cölln
106.	Cadis
88.	Rottes de Conſtant.
112.	de Courtray
113.	Dantzig
114.	Dixmude
105.	Spanien
116.	Lion
99.	Rochelle
109.	Londen klein Gewicht
97.	Londen. groß Gewicht.
105.	Leipzig
145.	Livorno
105.	Luck
105.	Lübec
114.	L' Isle
123.	Marſeille
168.	Meyland
175.	Mantua
164.	Meſſina
151.	Modena
120.	Montpellier
105.	Mons
105.	Middelburg
169.	Naples
98.	Nürnberg
114.	Portugal
100.	Paris
96.	Ruen
122.	Riga
151.	Raconis
117.	Stockholm
101.	Stettin
106.	Sevilien
26 1/3.	Rottes de Seydé
62.	Rott. de Sicile
80.	Pics de Siam
158.	Saragoſſa

98. Franckfurth
152. Florentz
89. Geneve
150. Genua
112. Gent
105. Geldern
102. Hamburg
100. Strasburg
118. Thoulouſe
161. Tortoſe
151. Turin
113. Tournay
166. Venedig
158. Valentia
114. Ypern.

III. Capitel.

Von der Proportione Numerorum.

§. 685.

Von denjenigen Gröſſen ſagt man, daß ſie auf eine gemeinhabende Art beſchaffen (oder homogeniſch) ſeyn, davon der kleinſte Theil der einen nach vielmahliger Zuſammenſetzung, der andern Gröſſe kan gleich, oder auch gröſſer, als dieſelbe werden. * Erklär.

686. Wenn man den Gehalt einer Gröſſe bloß aus dem Gehalt einer andern homogeniſchen Gröſſe determiniret, ſo wird dieſe Gegeneinanderhaltung eine Verhältniß oder Ration genennet. Erklär.

Z. E. Der Senarius (6.) iſt zweymahl ſo groß, als der Ternarius (3.) 25. Jahr ſind $\frac{1}{4}$ von einem Seculo, oder 100 Jahren.

687. Alſo haben 6 Zoll und 4 Meilen auch eine Ration untereinander, denn jener Theile multiplicirt, können 4 und mehr Meilen ausmachen. Hingegen haben 2 Pfund mit 6 Jahren keine Ration. Denn ich mag 2 Loth oder 2 Pfund ſo vielmahl nehmen, als ich will, bringe ich keine 6 oder mehr Jahr heraus, das iſt, wie man ſonſt Anmerck.

* Euclid. V. Lib. V. it. I. Lib. X.

spricht: Heterogeneorum non datur Ratio. Z. E. Die Linien haben mit den Flächen, und diese mit denen Cörpern keine Verhältniß. Jedoch ist dieses nicht auf die Algebraischen Potenzen zu ziehen, als welche nehmlich alle, respectu ihrer gemeinschafftlich angenommenen einerley Einheit von einer einzigen Dimension zu seyn, gehalten werden. * Wie denn ein algebraisch Quadrat a^2 etliche mahl, nehmlich a mahl genommen, seinem Cubo a^3 gleich wird. Und da die Quantitates privativæ gleichwohl reales sind, (§. 216.217.) so können auch diese mit denen positivis eine Verhältniß haben, und pflegt man von einem, der 800 Thl. schuldig ist, und nur 200 hat, gar offt zu sagen, daß seine Schuld viermahl so groß sey, als sein Vermögen. Hingegen hat z. E. 9 gegen 0 keine Ration, denn vielmahl 0 ist $=$ 0, und kan kein Multiplum von 0 den Novenarium übertreffen.

Zusatz. 688. Auf solche Art gehören zu einer Ration allemahl 2 Termini, davon der erste, so gegen einen andern gehalten wird, und vorher da ist, Antecedens, der andere aber, gegen welchen man den vorhergehenden hält, Consequens rationis benahmet wird.

Zusatz. 689. Und so misset man mit dem Consequente, oder auch mit dessen Theilen das Antecedens aus. Z. E. Eine Linie von 15 Ellen ist gegen eine von 3 Ellen fünffach so groß. Denn mit dieser kan man jene just 5 mahl ausmessen. Also auch 20 gegen 6 ist $3\frac{1}{3}$ mahl so groß. Desgleichen so 8 gegen 12 gehalten wird, ist 8 nur $\frac{2}{3}$ mahl so groß als 12. Denn so ich den dritten Theil (4) aus 12 nehme, so reichet er just 2 mahl in 8 hin. Und eben von dieser Ausmessung ist solcherley Verhältniß Ratio κατ' ἐξοχήν, oder auch Geometrica genennet worden.

* Vid. Herrn Prof. Hasii Dissert. de Nihilo Mathemat. pag. 4. und 17.

690. Nehmlich zum Unterscheid der Arithmetischen Verhältniß, da man bey Vergleichung zweyer Zahlen nicht auf ihren offtmahligen Gehalt, sondern nur auf ihre Differentz siehet, als so man sagt: 9 ist um 5 gröſſer, als 4, oder 4 ist um 5 weniger als 9, ist es bloß ratio Arithmetica, oder mit Weigelio zu reden, * Ratio differentialis, von deren Gegeneinanderhaltung schon oben §. 504. seqv. gehandelt worden. Anmerck.

691. Da nun die Ausmessung einer Zahl durch eine andere dividendo geschiehet, (§. 128. 129.) so muß man das Antecedens mit dem Consequente dividiren, (§. 689.) davon denn der herauskommende Quot, Exponens Rationis, (der Exponente, Anzeiger, oder Angeber,) und solche Verhältniß von Weigelio ** Ratio Quotiformis betitult worden. Z. E. 15 gegen 3 ist 5 fach. Denn 15 dividirt mit 3 giebt den Exponenten 5. Also auch 4 gegen 36 ist der 9te Theil. Denn $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, und ist dahero der Exponente 1:9 (§. 349. 355.) Anmerck.

Uberhaupt von der Ration *a* gegen *x* ist der Exponens *a* : *x*, es mag nun *x* gröſſer oder kleiner seyn, als *a*.

Von *ena* gegen *enb* ist der Anzeiger *ena* : *enb* = *a* : *b*. (§. 360.)

692. Da auch in Brüchen die genommenen Einheiten, oder der Gehalt des Zehlers bloß nach denen gleichförmigen Einheiten, oder dem Gehalt des Renners determiniret wird, (§. 344.) so sind die Brüche auch nichts anders, als Rationes. (§. 686.) Anmerck.

693. Eine Ration heist gröſſer als die andere, wenn ihr Exponente gröſſer ist, als der andern. Z. E. 6 gegen 2 ist gröſſer, als 10 gegen 5. Denn jener Exponente ist 3, und dieser nur 2. 4 gegen 20 ist gröſſer als 3 gegen 24. Denn 1:5 > 1:8. Dergleichen Rationes heissen inæquales, diversæ, oder auch dissimiles. Erklär.

* Erh. Weig. in Idea Mathes. universæ p. 18. §. 9.

** Loc. cit. pag. 18. §. 10.

Erklär. 694. Wenn ein grösſers gegen ein kleiners gehalten wird, das iſt, wenn das Antecedens gröſſer iſt, als das Conſequens, ſo heiſt es Ratio majoris Inæqualitatis, (eine ungleich gröſſere Verhältniß,) ſo aber das kleinere gegen ein grösſers betrachtet wird, oder, wo das Antecedens kleiner, als das Conſequens, da iſt es Ratio minoris Inæqualitatis, (eine ungleich-kleinere Verhältniß) und ſo ſie einander gleich ſeyn, ſagt man, ſie ſeyn in Ratione æquali.

Wenn $a > b$, giebt a gegen b die erſte ungleiche, b gegen a. die andere ungleiche, und a gegen a die dritte, oder gleiche Verhältniß.

Erklär. 695. Die Zahl, welche andeutet, wie offt man den einen Terminum nehmen ſoll, daß er dem andern gleich werde, heiſt der Nahmen, oder der Nenner, (Denominator) ſolcher Ration. Und wird gefunden, wenn man den gröſſern mit dem kleinern dividiret, als in der Ration 6 gegen 3, iſt der Nahme der Verhältniß 2, und in der Ratio 4 gegen 20, iſt der Denominator 5.

Uberhaupt, wenn $a > y$, iſt der Nahme der Verhältniß $a:y$, ſo $a < y$, iſt er $y:a$. Dahero iſt in der Ratione majoris inæqualitatis, Exponens und Denominator einerley. (§. 691.)

Zuſatz. 696. Wenn von $a > y$ der Nahme der Verhältniß $a:y = n$, ſo iſt $yn = a$. (§. 635.) und $y = a:n$. (§. 637.) Desgleichen, ſo von $a < y$ der Denominator $y:a = n$ ſo iſt $y = an$. (§. 635.)

Zuſatz. 697. Daher kan man aus dem gegebenen Antecedente und Denominatore alſo gleich das Conſequens bekommen, wenn man in der ungleich-gröſſern Verhältniß das Antecedens mit dem Denominatore dividirt, und in der ungleich-kleinern das Antecedens mit dem Denominatore multiplicirt.

Z. E. So im ersten Fall das Antecedens 42 und der Nahmen 6, so ist das Consequens 7. Und so im andern Fall das Antecedens 8, und der Denominator $1\frac{1}{2}$, so ist das Consequens 12.

Anmerk.

698. Wenn aus der Ration $a > x$ oder $a < x$, der Exponente $\frac{a}{x} = n$, (§. 691.) es mag nun n eine ganze, gebrochene, oder surdische Zahl seyn, so ist in allen Fällen $x\,n = a$ und $x = a : n$. (§. 635. 637.)

Zusatz.

699. Derowegen da $x . \frac{a}{x} = a . 1$, ist a gegen x, wie $\frac{a}{x}$ gegen 1. (§. 271.) Nehmlich in ieder Ration ist das Antecedens gegen sein Consequens, wie der Exponente gegen 1. Und wo der Exponente 1 ist, da ist das Antec = seinem Consequenti, oder Ratio Æqualis.

700. Folglich darff man nur in allen Rationen, (sie mögen ungleich grösser oder kleiner seyn, (das Antecedens mit dem Exponenten dividiren, so kömmt allezeit das Consequens.

Z. E. Wenn der erste Terminus 20, und der Exponente $3\frac{1}{3}$ oder 10:3, so ist der andere hierzu gehörige Terminus = 6. Denn $\frac{20}{1}$ dividirt mit $\frac{10}{3}$ sind = 60:10 (§. 372.) = 6:1 = 6. (§. 360.) So das Antecedens 4 und der Exponente $\frac{2}{9}$ so ist das Consequens $\frac{4}{1} : \frac{2}{9} = 36:2 = 18$.

Zusatz.

701. Gleichergestalt, wenn aus einer Verhältniß das Consequens mit dem Exponenten gegeben, so findet sich alsbald das Antecedens, wenn man das Consequens mit dem Exponenten multiplicirt, als so aus einer Ration das Consequens 10 und der Anzeiger $2\frac{3}{5}$, dann ist das Antecedens 26. §. 698.

Erklär. 702. Aehnliche Verhältnisse, (Rationes similes) nennet man diejenige, deren Exponenten, oder auch ordentlich-gefundene Denominatores einander gleich sind.

Z. E. 6 gegen 2, und 15 gegen 5, sind ähnliche Rationes, weil sie beyde einerley Exponenten (3) haben. Also sind 4 und 9, desgleichen 12 und 27 Rationes similes, den $\frac{2}{4} = \frac{12}{27}$ (§. 349. 355.) Oder $2\frac{1}{4}$ ist beyderseits der Nahme der Verhältniß. Hingegen ist 6 gegen 3 nicht wie 7 gegen 14. Denn das Nomen Rationis (2) ist nicht ordentlich gefunden worden, sondern 6 ist gegen 3, wie die letzte umgekehrte Ration, nehmlich 14 gegen 7.

Erklär. 703. So man zwey oder mehr ähnliche Verhältnisse zusammen nimmt, und gegen einander hält, entstehet eine Proportion, (oder wie etliche lieber sprechen, eine Proportionalität.) und daher ist sie nichts anders, als eine Übereinstimmung gleichmäßiger Verhältnisse (Identitas oder Similitudo Rationum, oder auch Analogia.)

Z. E. 4 gegen 2, desgleichen 10 gegen 5, giebt eine Proportion, denn beydes sind ähnliche Rationes, nehmlich doppelt-grosse. Und sagt man, 4 verhält sich gegen 2, wie sich 10 verhält gegen 5. Oder 2 ist so offt enthalten in 4, als 5 enthalten ist in 10. Desgleichen, die Tetras begreifft so vielmahl den Binarium, als die Decas den Quinarium.

Zusatz. 704. Demnach muß eine Proportion aufs wenigste 4 Terminos haben, nehmlich das erste Antecedens und das erste Consequens, hernach das andere Antecedens und das andere Consequens, und wo nur 3 Termini in einer Proportion stehen, da wird der mittelste zweymahl gerechnet, als so 2, 6, 18. proportionirt seyn, ist 2 gegen 6, wie 6 gegen 18.

Erklär. 705. Insgemein bezeichnet man eine Proportion mit vier Puncten, (::) und zwar, wenn zwischen allen nach-

bar-

barlichen, (oder nebeneinander stehenden) Terminis einerley Exponente ist, mit ∴, als ∴ 2. 6. 18. oder ∴ 2, 4, 8, 16, geben eine durchgängige, (continuam) Proportionem. Hingegen bezeichnet man sie nur mit vier blossen Puncten, wenn der Exponente zwischen dem ersten und andern, und zwischen dem dritten und vierdten nur einerley ist. Als 12.4::15.5 stehen in einer unterbrochenen (discreta) Proportione.

706. Es ist aber schicklicher, sothane Expressiones so Anmerck. gleich als eine Æquation aus der Identitate exponentium zu formiren, und mit den neuern Autoribus zu schreiben: $12 : 4 = 15 : 5$,

Oder $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$.

Uberhaupt, so a gegen b wie c gegen d, setzet man kurtz $a:b = c:d$, sintemahln die Signa scientifica, denen non-scientificis billig vorzuziehen. *

707. Wo mehr, als 4 Termini in Proportione continua stehen, nennet man dergleichen Reihe eine (geometrische) Progression, als ∴ 2, 6, 18, 54, 162, 486 ꝛc. Erklär.

708. Die continue-æquidifferentes, (§. 504. 505.) heissen zwar die meisten eine Arithmetische Progression, und nennen sie continue-Arithmetice proportionales, sed minus proprie, wie vorher belobter Herr Autor allbereit angemercket in Elem. Math. univer. p. 82. Arithm. §. 293. Es ist aber von solcherley Art Zahlen, und ihren vornehmsten Eigenschafften §. 504. seqv. desgleichen in der 37. 38. 39. 50 und 51. Aufgabe das nöthigste schon bey gebracht. Anmerck.

* Vid. Herrn Hof-Rath Wolfii Element. Math. Univ. pag. 49. §. 143.

70. Auf-

70. Aufgabe.

70. Aufgabe.

709. Wenn zu einer gegebenen Ration, das Antecedens einer ähnlichen andern Ration benennet wird, das dazu gehörige Consequens zu finden, oder zu 3 gegebenen Zahlen die vierdte Proportional-Zahl zu berechnen.

Man dividire das benannte Antecedens mit dem Exponenten der gegebenen Ration, so kommt das gesuchte Consequens. (§. 700.)

Z. E. Wenn zur Ration 6 gegen 2 das Antecedens 51, (einer andern ähnlichen Ration) gegeben, so dividire man 51 mit 3, kommt das verlangte Consequens 17.

Desgleichen so zu denen 3 gegebenen Terminis 4, 12, 75, der vierdte proportionirte soll gefunden werden, setze man

I	II	III
4	12	75

$\frac{I}{3}$ Fac. 225. IV.

Überhaupt, so zu a und b das andere Antecedens c gegeben, so ist das andere Consequens solcherley ähnlicher Ration

$$\frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$$ (§. 372.)

Zusatz. **710. Auf diese Art ist das andere Consequens (oder der IV. Terminus,) allemahl gleich dem Quotienten, so heraus kommt, wenn man das Factum des gegebenen andern und dritten mit dem ersten dividiret.**

Zusatz. **711. Oder da man auch aus dem Denominatore und dem Antecedente einer Ration, so gleich ihr Consequens finden kan, multiplicire man in einer ungleich kleinern**

Ver-

Verhältniß das gegebene Antecedens mit dem Denominatore, und in der ungleich-gröſſern dividire man damit solch Antecedens, z. E.

4 geben 26, was geben 78

$$\frac{78}{4} = 6\frac{1}{2}$$

468
39

Fac. 507

Desgleichen 42, thun 14 was thun 37

$$\frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}$$

Fac.

712. Weil das andere Consequens $= \frac{bc}{a}$ (§. 709.) Zusatz. $= b : \frac{a}{c}$ (§. 372. β.) so kan man auch den ersten mit dem dritten, und mit dem Quot den andern dividiren, als 7 giebt 31, was giebt 63

$$\frac{(9}{}$$

Fac. 279. (§. 372. β. γ.)

713. Demnach hat man vier differente Wege, das Zusatz. andre Consequens oder den 4ten Terminum heraus zu bringen, so zwar alle richtig, iedoch in allen Fällen nicht gleich kurtz sind, nehmlich man kan entweder

I. Den dritten mit dem Exponenten dividiren. (§. 709.)

II. Oder so der Exponente ein mühsamer Bruch, und der Denominator eine leichtere Zahl, selbigen damit multipliciren oder dividiren. (§. 711.)

III. Oder so auch der Nahme der Verhältniß schwehr lautet, den andern mit dem Quot aus dem ersten und dritten dividiren. (§. 712.)

IV. Und da auch dieser Quot schwehr fallen solte, kan man den andern mit dem dritten multipliciren, und das Factum mit dem ersten dividiren. (§. 710.)

Wel-

Welcher letztern Art man sich deswegen am meisten bedienet, weil die Bruchs-Rechnung dadurch am ehesten und sichersten vermieden wird.

Anmerck. 714. Diese Aufgabe wird sonsten Regula de Tri oder de tribus Numeris, und wegen ihres weit ausschweiffenden Nutzens Regula Aurea genennet, welche in nichts anders bestehet, als daß man nach einer gegebenen Ration und einer dritten Zahl, die noch fehlende vierdte findet, welche mit der dritten eine der vorigen ähnliche Ration machet.

Anmerck. 715. Ehe und bevor man aber diese und andere daraus herstammende Reguln völlig dürffte abhandeln, wird noch nöthig seyn, einige unentbehrliche Eigenschafften der Ration und Proportion besonders zu erklähren.

Eintheilung der Rationen. 716. Nehmlich es hält eine grössere Zahl eine kleinere nur auf fünfferley Weise in sich:

I. Entweder einmahl und einen einzigen Theil der kleinern drüber, als 4 gegen 3. Und wird solche Gegeneinanderhaltung von dem überbleibenden Theil, (oder der übertreffenden Unität) Ratio Superpartricularis, die übertheilige Verhältniß genennet, im lateinischen durch das Wörtlein sesqui, und die Ordnungs-Zahl des kleinern Termini ausgesprochen, z. E. vorige Ration 4:3 heist sesquitertia. In der Music ist ein Thon gegen seinem folgenden, wie 9 gegen 8, das ist: in ratione sesquioctava.

II. Oder einmahl und mehr Theile der kleinern drüber, als 5 gegen 3, so von denen mehrern übrig bleibenden Theilen Ratio superpartiens, oder die überttheilende Verhältniß benennet ist, und wird von den Lateinern durch das Wörtlein super, mit dem Nomine Adverbiali der übrigen Theile, und der Ordnungs-Zahl des kleinern Termini exprimiret. Z. E. Die Schwehre des Olei Vitrioli gegen der Schwehre von eben so viel Spiritu

Vini

Vini ist in Ratione supertripartiente quartas (sc. partes) nehmlich wie 7 gegen 4.

III. Oder **mehrmahl ganz genau, und nichts drüber**, als 15 gegen 3. Und wird Ratio Multiplex, die **vielfache Verhältniß** genannt, insonderheit von dem herauskommenden Exponenten 2, 3, 4, 5 ꝛc. Dupla, Tripla, Quadrupla, Quintupla &c.

Z. E. 18 Loth Kupffer in der Lufft gewogen, wägen im Wasser nur 16. Loth. Ist demnach die Schwehre in der Lufft gegen die Abnahme im Wasser in Ratione nonupla, nehmlich wie 9 gegen 1.

IV. Oder **mehrmahl und noch einen einzigen Theil der kleinern drüber**, als 7 gegen 3. Es wird ihr Nahme aus der vorigen und der ersten zusammen gesetzet, und heist Ratio Multiplex superparticularis, eine **vielfache übertheilige Verhältniß**. Z. E. Nach Archimede ist zwischen dem Umfang und Durch-Messer eines Circuls Ratio tripla sesquiseptima, das ist, die Peripherie **verhält sich zum** Diametro **wie 22 gegen 7**.

V. **Mehrmahl und etliche oder mehrere Theile der kleinern drüber**, als 11 gegen 3. Deren Nahme aus der dritten und andern Art zusammen gesetzet, und Ratio Multiplex superpartiens, **die vielfache übertheilende Verhältniß** genennet wird. Z. E. Das Zinn ist gegen sein Gewicht, so es im Wasser verlieret, in Ratione septupla superbipartiente quintas, oder **wie 37 gegen 5, nehmlich 37 Pfund wägen im Wasser nur 32. Pfund.**

717. Dahero wenn m, n, r, unterschiedene gantze Zahlen, (nehmlich iede grösser als 1, (§. 11.)) und $n > r$ primi inter se seyn, so kommen die Symbola Rationum Universalia, und ist Zusatz.

1.) $n:n-1$ Ratio Superparticularis.
2.) $n+r:n$ Ratio Superpartiens.
3.) $mr:r$, das ist $m:1$ Ratio Multiplex.
4.) $mr+1:r$. Multiplex Superparticularis.
5.) $mn+r:n$. Multiplex Superpartiens. (§. 290.)

Anmerck. 718. Woferne aber der kleine Terminus voranstehet, und es Ratio minoris Inæqualitatis ist, so pflegt man nur das Wörtlein sub voranzusetzen, als 3 gegen 4 ist Ratio subsesquitertia $= n-1:n$ oder $n:n+1$. Desgleichen 3:5 ist Ratio subsuperbipartiens tertias, $= n:n+r$. und so weiter.

Anmerck. 719. Bey der ersten Art der Verhältniß, das ist, so die ersten 2 Termini in der Regul de Tri Rationem superparticularem machen, giebt es ein Compendium, nehmlich wenn man den dritten Terminum mit dem ersten dividirt, und den Quotum (in der ungleich-grössern) subtrahirt, oder, (in der ungleich-kleinern Verhältniß) addiret Z. E.

Franckf. Pf. Lond. Pf. groß Gewicht.
98 thun 97 was thun 2156 Franckf. Pfund?
22

2134 Lond. Pf. (§. 686.)
37 Ellen machen an einem andern Ort 38, Ellen,
was thun daselbst 689 Ellen?
/ / /
31
/ /
7

18:23

Fac. 707: $\frac{23}{37}$.

Be-

Beweiß.

So man inferiret: n giebt $n \pm 1$ was giebt t?

Fac. $\frac{nt \pm t}{n} = \frac{t \pm t}{n}$. (§. 710.)

720. Wenn der überbleibenden Theile in der Ratione Anmerck. superpartiente nicht gar zu viel sind, hat man auch einen Vortheil, so man mit dem ersten in den dritten dividirt, den Quotum mit der Anzahl der überbleibenden Theile multiplicirt, und das Factum vom dritten subtrahirt. Als:

23

489 geben 487 was geben 1471.

3 : 4

6 : 8 (2

481

Fac. 1464

489

Beweiß.

So man die allgemeine Expression solcher Verhältniß wie gewöhnlich ansetzet, und (nach §. 713. 4.) verfähret:

$n \pm r$ giebt n, was giebt t? Fac. $\frac{nt}{n \pm r}$ vor den vierdten.

Dergleichen aber kommt auch heraus, wenn man $\frac{t}{n \pm r}$ mit r multipliciret, und $\frac{rt}{n \pm r}$ von t, oder welches gleich viel, von $\frac{nt \pm rt}{n \pm r}$ subtrahiret, denn also restiret $\frac{nt}{n \pm r}$ vor den vierdten, wie zuvor.

721. In solcher ungleich-kleinern Verhältniß verfähret man eben also, nur daß das Factum zum dritten zuletzt addiret wird, Anmerck.

Als: 542 — 547 — 1134

2 : 50 (5

10 : 250

Fac. 1144 : $\frac{250}{542}$

Beweiß.

$n — /\!/ ntr — /\!/ t$? Fac. $\frac{ntrt}{n} = t + (\frac{t}{n} . r)$

Anmerck. 722. In der Ratione Multiplici und submultiplici dividiret, oder multipliciret man den dritten mit dem Denominatore der ersten Ration. (§. 711.) Z. E.

An 35 profitiret man 7 was an 219?

5) ———

Facit. $43\frac{4}{5}$

23 geben 138 was 475 (6

Fac. 2850

Nehmlich:

$mr : r = t : (t : m)$ und $r : mr = t : mt$.

(§. 706. 355.)

Anmerck. 723. Auf gleiche Weise kan man vermittelst dieserley Algebraischen Ausdrückungen auch in den übrigen Verhältnissen noch hier und da einen Vortheil finden, welcher in der Ausübung gar sehr abkürtzet, und ist nichts dran gelegen, wir mögen nun solche Abbreviation die Welsche oder eine andere Practicam nennen.

Eintheilung der Exempel in der Regul de Tri.

724. Indem die Unität weder multiplicirt noch dividirt, (§. 119. 131.) so hat man nach dem (713. §. N: IV.) in der Ratione mul- und submultiplici bloß alleine mit dem Nahmen der Verhältniß den dritten zu dividiren, oder zu multipliciren, auch weil der erste zum dritten, wie

wie der andere zum vierdten, (§. 272.) so giebt es in der Regul de Tri hauptsächlich dreyerley Gattungen Exempel, nehmlich wir schliessen entweder

I. Von der Eigenschafft oder Beschaffenheit eines einzelen Dinges auf die Beschaffenheit vieler Dinge, als:

1 Stück erfordert 6 Tage, was 15 Stück?

Fac. 90 Tage.

Das ist, in homogenischen Rationen:

1 Stück : 15 Stück = 6 Tagen : 90 Tagen.

II. Oder man argumentiret von der Eigenschafft vieler Dinge auf die Eigenschafft eines einzelen Dinges, als:

8 Cent. kosten 72 Thl. was 1 Cent. Fac. 9 Thl.

Das ist: 8 Cent. : 1 Cent. = 72 Thl. : 9 Thl.

III. Oder man schliesset von der Beschaffenheit vieler Dinge, auf die Beschaffenheit anderer vieler Dinge, als:

4 Ellen kommen 13 Thl. was 17 Ellen?

$$\text{Fac. } \frac{221}{4} = 55\frac{1}{4} \text{ Thl.}$$

Das ist: 4 Ellen : 17 Ellen = 13 Thl : 55 $\frac{1}{4}$ Thl.

725. Und deswegen heist man gemeiniglich die erste Gattung Multiplications„ die andere Divisions„ und die dritte Proportions„ Exempla, deren Operation so wohl in blossen, als benahmten Zahlen durch oben angewiesene Vortheile im multipliciren und dividiren (§. 408. und vielen folgenden,) gar sehr erleichtert und abgekürtzet wird. Vortheile darinnen.

726. In übrigen lassen sich zwar die benahmten Zahlen auch bißweilen gegen einander aufheben, aber es ist nicht eines ieden Werck, solches so gleich abzusehen, z. E. Anmerck.

Pf. Lo.	Thl. Gr.	Pf. Lo.
17: 12 kosten	94 -„ 10	was kommen 13: 1?

2)

	47 : 5	
4)	11 : 19	3
2)	5	21 : $7\frac{1}{2}$
.	5	21 $7\frac{1}{2}$

Fac. 70: 19: 6

Nehmlich von 17 Pf. 12 Lo. ist die Helffte 8 Pf. 22 Lo.

Davon das Viertel	2 :	$5\frac{1}{2}$
Hiervon die Helffte	1 :	$2\frac{3}{4}$
noch einmahl	1 :	$2\frac{3}{4}$
Summa:	13 Pf. 1 Lo.	

Da nun die Preisse der Vielheit der Waare proportioniret seyn, so kostet die Helffte von 17 Pf. 12 Lo. auch nur halb so viel, als 94 Thl. 10 Gr. ꝛc.

Sonst kan man auch setzen:	Thl.	Gr.
556 Loth geben	417 Loth was	94 -„ 10
4	„ 3	23 : 14 : 6

Fac. 70 : 19 : 6

(§. 719.)

Nehmlich aus meiner Anatomia Numerorum siehet man so gleich, daß die erste Ration mit 139 auf die primos inter se, das ist, auf 4 und 3. reducibel sey.

Ein Exempel von allen 3 Arten zugleich.

727. Indem die dritte Gattung aus Multiplications-„ und Divisions-Exempeln zugleich bestehet, kan folgende Operation alle 3 Arten auf einmahl illustriren. Nehmlich a) wenn ein Stück 54 Thl. 11 Gr. 7 Pf. kostete, kähmen 29 Stück 1579: 23: 11. b) Wenn 13. Stück 1579 Thl. 23 Gr. 11. Pf. betragen, kähme 1 Stück 121 Thl. 12 Gr. 11 Pf.

(c) Ends

c) Endlich da 13 Stück 54: 11: 7 kosten, kommen 29 Stück 121 Thl. 12 Gr. 11 Pf. (§. 713. IV.)

13 St. 54: 11: 7: was 29 St.

(6
174 (9
1566
9: 16
2: 10
1: 5
14: 6
2 5

1579: 216 = 121 Thl.
167 = 12 Gr.
31 = 11 Pf.
1

8 6
2 1
1

Der Process fliesset aus der oben angewiesenen vortheilhafften Multiplication §. 427. und bequemen Division (12. Aufgabe) wie auch §. 410.

728. Wolte man dergleichen Rechnung nach der Decimal-Expression ansetzen, so suche man aus vorigen Tabellen (§. 669.) 11 Gr. 7 Pf. und setze die gegen-über stehenden Decimal-Theile: 4826388. an die 54 Thl, kommen: Anmerck.

13 — ″ 5448263 88 — ″ 29

4903437492
1089652776

15799995525 (121|5381942
13) 21684022536 (§. 670.)
11121311

Vom Quoto schneide man 7 Ziffern ab, suche den Abschnitt in Tabb. so kommt gleichergestalt voriges Facit: 121 Thl. 12 Gr. 11 Pf.

Anmerck. 729. Und nunmehro kan man die Müntz-, Maaß- und Gewichts-Vergleichung auch durch die Proportion-Regul expediren, als

4 Sp. Duc. thun 11 Thl. was thun 1 Pfund Sp. Duc.
Das ist: 134. Spec. Duc? *

134
1474
4)
Fac. 368 Thl. 12 Gr.

Regul de Tri in Brüchen. 730. Wenn Brüche in die Regul de Tri mit einschleichen, braucht man eben so viel Special-Reguln nicht, als mehrentheils gegeben werden, sondern man darff nur überhaupt die vermischten Brüche einrichten, (§. 353.) unter die gantze Zahlen statt des Nenners eine Unität setzen, (§. 10.) hierauf den vordersten umkehren, und alle Zehler, desgleichen alle Nenner in einander multipliciren, so giebt das Factum allemahl die 4te gesuchte Proportional-Zahl. (§. 713. IV. und 371, desgleichen 372. β.)

* Dethl. Cluverus in Nova Crisi Temporum, 1701. P. II. pag. 80.

Als

Als $\frac{3}{4}$ Cent. kosten $\frac{5}{6}$ Thl. was $8\frac{1}{5}$ oder $\frac{41}{5}$ Cent?

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{41}{5} = \frac{820}{90} = 9\frac{1}{9} \text{ Thl.}$$

Auf 6 Cent. tauscht einer $7\frac{1}{5}$ Cent. was auf $11\frac{1}{8}$ Cent?

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{89}{8} = \frac{3204}{240} (= 13\frac{84}{240} \,|\, 7$$

Not. Weil $\frac{1}{6} \cdot \frac{36}{5} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$ kan man so gleich $\frac{89}{8}$ damit multipliciren, kommen $\frac{534}{40} = 13\frac{7}{20}$.

und dieses findet auch statt, wenn man das Factum derer 2 letzten Brüche in kleinern Terminis haben kan.

731. Es hilfft auch nicht wenig, so der erste und andere, oder der erste und dritte Bruch auf einerley Nenner gebracht, und deren Zehler nur statt der Brüche gebraucht werden, als Anmerck.

Vor $\frac{7}{8}$ Thl. kaufft man $6\frac{1}{4}$ Pf. was vor 63 Thl.

28 —— 200 (§. 364. 362.)

4) 7 50 (§. 270.)

(9

Fac. 450. Pf. (§. 712.)

Oder wenn einerley Zehler vorhanden, kan man auch ihre verkehrten Nenner nehmen, als

$1\frac{2}{3}$ erfordern Zusatz $\frac{5}{16}$ was $24\frac{}{3}$?

16 „ 3 (§. 365.)

8) — (3

2 9 1

2) (4— Facit.

2.

Aus $6\frac{2}{3}$ Cent. kosten $9\frac{3}{4}$ Marck, wie viel aus $14\frac{2}{5}$ Cent?

20	39	72
3	4	5
80	117	9
8) —	—	—
10	1053	5

5) —

3

Fac. $21\frac{3}{50}$ Marck.

Lehrsatz oder Modi argumentandi in Proportionen.

732. Es mag in folgender Proportion m eine gantze, oder gebrochene, oder auch eine surdische Zahl vorstellen, nehmlich wann $ma : a = mb : b$, so ist auch

I. Inversè. $a : ma = b : mb$

II. Alternatim. $ma : mb = a : b$

III. Compositè. $ma + a : a = mb + b : b$

IV. Conversim. $ma + a : ma = mb + b : mb$

V. Divisim. $ma - a : a = mb - b : b$

oder $ma - a : ma = mb - b : mb$

VI.

VI. per Syllepsin : $ma + mb : a + b = ma : a$,

oder wenn : $ma : a = mb : b = mc : c$ &c.

so ist $ma + mb + mc : a + b + c = ma : a = m : 1$

VII. per Dialepsin. $ma - mb : a - b = ma : a$

VIII. Auch wenn $ma : a = mb : b$

und $pc : c = pd : d$

So ist de Facto $mapc : ac = mbpd : bd$

IX. Wenn ordinate : $ma : a = mb : b$

und $a : na = b : nb$

So ist ex æquo : $ma : na = mb : nb$

X. Also auch, wo $ma : a = mb : b$

und $na : a = mb : mb$

n

So ist in äussersten : $ma : na = mb : b$

n

XI. Wenn perturbatè $ma : a = mb : b$

und $a : na = mb : mb$

n

so ist ex æquo : $ma : na = mb : b$

n

XII. Endlich wenn $ma : a = mb : b$

so ist in Potentiis $(ma)^n : an = (mb)^n : b^n$.

Welches alles aus der Identitate Exponentium oder Factorum erhellet. (§. 706. 702. 271.)

733. Woferne $c + d + f$ alle partes von A seyn, und Lehrsatz. $A : B = c : g = d : h = f : l$, so müssen $g + b + l$ auch alle partes von B seyn.

Denn

Denn $A+c+d+f:B+g+h+l = A:B$. (§. 732. VI.)
Ergo altern. $A+c+d+f:A = B+g+h+l:B$. (II.)
Divisim. $A+c+d+f-A:A = B+g+h+l-B:B$ (V.)
Das ist: $c+d+f:A = g+h+l:B$.
Nun ist $c+d+f = A$. Ergo auch $g+h+l = B$.

Hierauf bestehet das Fundament zur Reg. Societatis; Mixtionis, desgleichen zur Falsi simplicis Positionis, und zu denen letzten Ansätzen der Regulæ Alligationis.

Lehrsatz. 734. So man 3 beliebige Zahlen, a, b, c, allerseits mit einer dritten, m, multiplicirt, so ist die Difference des ersten und andern Facti gegen die Difference des ersten und dritten, (oder auch des andern und dritten) Facti, wie die Difference der ersten und andern Zahl, gegen die Difference der ersten und dritten, (oder auch der andern und dritten) Zahl. Als von

a, b, c,
m m m

am bm cm ist

$$am-bm : \begin{cases} am-cm \\ bm-cm \end{cases} = a-b : \begin{cases} a-c \\ b-c \end{cases} \text{(§. 271. 702.)}$$

Lehrsatz.

735. Desgleichen so man zu denen ersten Productis allerseits n addiret, oder subtrahiret, ist z. E.

$$(am \pm n)-(bm \pm n) : (am \pm n)-(cm \pm n) =$$
$$a-b : a-c \quad \text{(§. 271. 702.)}$$

In diesen zwey letzten Lehrsätzen liegt der Grund zur gewöhnlichen Regula Falsi duplicis Positionis.

736. Wenn in einer (geom.) Progression der erste Terminus a, der Nahme der Verhältniß m, und a auf einer Seite wachsend, auf der andern Seite aber abnehmend fortschreitet, so giebt folgende Expression das Symbolum geometricæ Progressionis universale:

IV III II I II III IV

&c. a a a a am^1 am^2 am^3 &c. (§. 697)

$\frac{}{m^3}$ $\frac{}{m^2}$ $\frac{}{m^1}$

Oder weil überhaupt von $\frac{am^{\cdot n}}{}$: $\frac{a}{}$

$\frac{}{I}$ $\frac{}{mn}$

der Expon. $=\!=$ $\frac{am^0}{a}$ (§. 691.)

$=\!=$ $\frac{aI}{a}$ (§. 472.) $=\!=$ $\frac{a}{a}$ $=\!=$ I, ist $\frac{a}{m^n}$ $=\!=$ am^{-n}

(§. 699.)

Und daher auch iede solche Progression $=\!=$

am^{-3} am^{-2} am^{-1} am^0 am^1 am^2 am^3

Das ist, wenn a $=\!=$ I, $=\!=$

m^{-3} m^{-2} m^{-1} m^0 m^1 m^2 m^3

Wobey man durchgehends wahrnimmt, daß ieder Terminus, dessen Ordnungs-Zahl $=\!=$ n, in einer wachsenden $=\!=$ am^{n-1}, und in einer abnehmenden $=\!=$

$am^{-(n-1)}$ oder $\frac{a}{m^{n-1}}$ Z. E. der IV. ist im ersten Fall $=\!=$ am^3, im andern Fall $=\!=$ am^{-3}, oder $=\!=$ $\frac{a}{m^3}$.

70. Aufgabe.

737. **Aus etlichen anfänglich gegebenen Termi-nis einer geom. Progression den letzten Terminum zu finden.** 70. Aufgabe.

1.) Erhebe man den Nahmen der Verhältniß auf diejenige Potentz, deren Exponente um 1 weniger, als die Ordnungs-Zahl des letzten Termini ist.

Z. E.

Z. E. So der 18 der letzte, und 3 der Nahmen der Verhältniß seyn soll, finde man die Potentz 3^{17} das ist, die 17te Potentz von 3. Welches geschiehet, so man z. E. 3^{17} in $3^4 . 3^4 . 3^4 . 3^4 . 3^1$ oder $3^8 . 3^8 . 3^1$ zerstreuet, und solche vorher bekannte Potentzen in einander multipliciret. (§. 275.)

2. Mit der erhobenen Potentz multiplicire man in einer wachsenden, und dividire in einer abnehmenden Progression den ersten, so kommt der letzte. Als, man soll den 18 Terminum zu der Progression:

4. 12. 36. 108 ꝛc.

Oder $4 \frac{4}{3} \frac{4}{9} \frac{4}{27}$ ꝛc. finden.

$3^8 = 6561$ (§. 475.)
$3^8 = 6561$

6561
39366
32805
39366

43046721 (3^1

129140163 ($4

Fac. 516560652 in wachsender,

und $\frac{4}{129140163}$ in abnehmender Progression.

Der Beweiß lieget gar deutlich in vorhergehendem §. 736.

Lehrsatz. 738. In ieder geometr. Progression ist die Summe aller Terminorum — dem letzten, gegen die gantze Summe — dem ersten, wie der erste gegen den andern.

Z. E.

Z. E. Es sey die Progression $a\ am^1\ am^2\ am^3\ am^4$ &c. so ist $a + am^1 + am^2 + am^3 : am^1 + am^2 + am^3 + am^4 = a : am$. (§. 702. 703. 271.)

71. Aufgabe.

739. **Aus dem ersten, andern, und letzten Termino einer geom. Progression die Summe aller Terminorum zu finden.** 71. Aufgabe.

Man multiplicire den andern in den letzten, und subtrahire hiervon das Quadrat des ersten. Dann dividire man den Rest mit der Differentz des andern und ersten.

Z. E. Ein Herr giebt iemanden das erste Jahr 3, das andere 6, nehmlich allemahl doppelt so viel, und das letzte Jahr 384 Thl. wie viel beträgt dieses in Summa?

2304 (6
9

2295

3)

Fac. 765 Thl.

Wäre nur der erste und andere, und die Anzahl der Terminorum gegeben, so erfindet man den letzten nach voriger Aufgabe.

Beweiß.

Man nenne die gesuchte Summe x, ultimum u, primum p, secundum f, so ist

$x - u : x - p = p : f$ (§. 738.)

$fx - fu = px - pp$ (§. 274.)

$fx - px = fu - pp$ (§. 634.)

$x = \frac{fu - pp}{f - p}$ (§. 637.)

740. Auf

Anmerck. 740. Auf gleiche Weise findet man auch die Summe derer unendlich absteigenden Brüche, allwo der letzte wegen unaussprechlicher Kleinigkeit ohne mercklichen Fehler gar wohl mag der Nulle (o) gleich geachtet werden. Z. E.

Man addire $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c. in infin.

und setze $x : x - \frac{1}{2} = 2 : 1$, so ist

$x = 2x - 1$

$x + 1 = 2x$

$1 = x =$ der gantzen Summe.

Oder weil die Brüche in der general-Expression (s. 736.) auf die lincke Seite kommen, kan auch ihr Valor mit - angedeutet werden, (s. 215. 216.) Dahero ist nach der 71. Aufgabe auch

$-\frac{1}{4} . o = o \parallel -\frac{1}{4} : -\frac{1}{4} = 1$

Desgleichen von $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c. in infin.

ist die Summe $= \frac{1}{2}$

Und $-\frac{1}{9} . o = o \parallel -\frac{1}{9} : -\frac{2}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ u. s. w.

Lehrsatz. 741. Sonst ist auch von ieder Progression:

$a \quad am \quad am^2 \quad am^3 \quad am^4$. &c.

$m - 1 : am^4 - a = 1 : am^3 + am^2 + am + a$

Denn beyderseits ist das Factum der mittelsten und äussersten $= am^4 - a$. (s. 271.)

Zusatz. 742. Hieraus fliesset die gewöhnliche Manier die Progressiones zu summiren:

Nehm-

Nehmlich man dividirt die Differentz des letzten und ersten mit dem Nomine Rationis - 1, und addiret zum Quoto den letzten, (§. 713. IV.) Z. E.

Ein Jude leihet einem Christen 100 Thl. auf 14 Monath, dem ersten Monath 1 Pf. dem andern 2 Pf. dem dritten 4 Pf. dem vierdten 8 Pf. und so fort immer doppelt so viel Interesse zu bezahlen, wie viel wird dieser jenem nach verflossenen 14 Monaten am Capital und Interesse zahlen müssen? Fac. 156 Thl. 21 Gr. 3 Pf.

$2^6 = 64$
$2^6 = 64$ (§. 475. pag. 268.)

4096 (§ 481.)
$2^1 = 2$

8192. Der letzte. (§. 737.)
2-1 = 1)8191. Differ. des letzten und ersten.

16383 Pf. Summa der Progression.

1365 : 3

thut 56 Thl. 21 Gr. 3 Pf. Interesse. (§. 410.)
Hierzu 100: Capital

Facit: 156: 21: 3. Capit. und Interesse.

743. Eine oder mehr Mittel-Proportional-Zahlen werden genennet, die mit ihren äussersten (als zwischen welchen sie stehen,) Proportionum continuam, oder, so ihrer viel sind, Progressionem geometricam machen. Erklär.

Z. E. Zwischen 2 und 8 ist medius proportionalis 4. zwischen 48 und 3 sind die medii proportionales 24. 12 und 6.

72. Aufgabe.

2. Aufgabe.

744. Zwischen zweyen Zahlen so viel medios proportionales zu finden, als man verlanget.

1.) Dividire man die letzte gegebene mit der ersten, und extrahire aus dem Quoto diejenige Wurtzel, deren Radical-Exponente um 1 mehr ist, als die Anzahl der gesuchten Mittel-proportionalium.

2.) Mit der ausgezogenen Wurtzel multiplicire man den ersten, so kommt die erste proportionalis, und eben mit solcher Wurtzel die gefundene erste proportionalem, so kommt die andere ꝛc. und kommen so fort die Mittel-proportionales nach ihrer Ordnung. Z. E.

Zwischen 12 und 972 sollen 3 medii proportionales gefunden werden.

$$12) \overset{''}{9}\overset{'}{7}2\ (81 \quad \text{Hieraus ist } \sqrt[4]{\quad} = 3$$

$$\overset{''}{1}\overset{'}{1}$$

Dahero sind die continue-proportionales:

12, 12.3, 12.3.3, 12.3.3.3, 972 und die Mittel-proportionales: 36, 108, und 324.

Desgleichen sey 6144 die erste, und 6 die letzte, wozwischen 4 Mittel-proportionales verlanget werden.

$$\frac{6}{6144} = \frac{1}{1024} \quad \text{davon } \sqrt[5]{\quad} = \frac{1}{4} \text{ (s. 475.)}$$

$$6144 \cdot \frac{1}{4} = 1536 \;||\; \text{diese} \cdot \frac{1}{4} = 384$$

$$384 \cdot \frac{1}{4} = 96 \;||\; \cdot \frac{1}{4} = 24.$$

Und

Und so sind die verlangten Mittel-proportionales
1536, 384, 96, und 24.

Daferne aber die auszuziehende Wurtzel surdisch ist, extrahire man sie per Approximationem nach §. 608.

Beweiß.

Es sey in einer Proportione continua der andere Terminus mit dem ersten dividirt $=$ x, die erste gegebene Zahl $=$ a, die letzte $=$ b, und der Numerus mediorum $=$ n,

So ist die Progression $\overset{\circ\circ}{\cdot\cdot}$ a, ax, ax^2, ax^3 &c. ax^n, b

Und die medii proportionales sind

ax, ax^2, ax^3, &c. ax^n.

Folglich ist $ax^{n+1} = b$ (§. 697.)

und $x^{n+1} = b:a$ (§. 637.)

$$x = \sqrt[n+1]{(a:b)} \text{ (§. 639.)}$$

So man nun hiermit den ersten a multipliciret, das ist,

$\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[n+1]{a^{n+1}}$, kommt $\sqrt[n+1]{a^n b}$ (§§91.617.) $= ax$ (§. 263.)

und so man $\sqrt[n+1]{\frac{a^n b}{1}}$ wiederum mit $\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ multipliciret,

kömmt $\sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2} = ax^2$, und so weiter kömmt die Progressio continua:

$\overset{\circ\circ}{\cdot\cdot}$ a, $\sqrt[n+1]{a^n b}$, $\sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2}$, $\sqrt[n+1]{a^{n-2}b^3}$, $\sqrt[n+1]{a^{n-3}b^4}$ &c. b

Zusatz. 745. Folglich sind solcher Radicum ihre Potenzen auch proportionirt, nehmlich

$\therefore a^{n+1}, a^n b, a^{n-1} b^2, a^{n-2} b^3, a^{n-3} b^4$ &c. b^{n+1}

(§. 732. XII.) Und da dieses ein Symbolum Potentiæ partium universale, (§. 500.) so sind auch die einzelen Membra aller Potentiarum in proportione continua, und alle zwischen inne stehende sind Mittel-proportionirliche zwischen ihren beyden äussersten.

Zusatz. 746. Demnach stehen die Termini extremi, wie auch die medii Proportionales von allen Potenzen wie folget:

$$a, \sqrt[2]{a^1 b}, b$$
$$a^2, ab, b^2 \quad \text{(§. 500.)}$$
$$a^3, a^2 b, ab^2, b^3$$
$$a^4, a^3 b, a^2 b^2, ab^3, b^4 \text{ &c. in infinitum.}$$

Und kan man z. E. zwischen 7 und 189. zwey Medios auch also finden, wenn aus dem Quadrat von 7, multiplicirt mit 189, desgleichen aus dem Quadrat von 189, multiplicirt mit 7, iedes Theils Radix Cubica extrahiret wird:

189 — (7 — 1323 (7 — (9261)$^{1:3}$ = 21. erster medius

35721 (7 — (250047)$^{1:3}$ = 63. anderer medius proportionalis.

Denn weiln $\therefore a^3, a^2 b, ab^2, b^3$, so sind auch

$\therefore \sqrt[3]{a^3}, \sqrt[3]{(a^2 b)}, \sqrt[3]{(ab^2)}, \sqrt[3]{b^3}$. (§. 732. XII.)

Erklär. 747. Wenn A etwas zugehöriges, oder zugeeignetes C hat, und B etwas zugehöriges D,

I II III IV.
A aber gegen B wie umgekehrt C gegen D
(das ist, wie D gegen C,)
so sagt man, solche 4 Zahlen seyn in proportione reciproca.

Nehmlich zum Unterscheid der ordentlichen Proportionen, so sonsten auch directæ heissen.

Z. E. 4 Arbeiter verhalten sich gegen 8 Arbeiter, (nicht, wie die Zeit darinnen 4 Arbeiter fertig worden, gegen die Zeit, darinnen 8 Arbeiter fertig werden, sondern) wie die Fertigungs-Zeit der letzten gegen die Fertigungs-Zeit der ersten.

748. Das Signum Proportionis reciprocæ seyn vier Punete über Eck gesetzet, als $4 \cdot 8 \cdot :: \cdot 6 \cdot 3$ Satz.

749. Dahero darff man nur eine Ration davon umkehren, so wird Proportio directa daraus, nehmlich $4:8 = 3:6$ oder $8:4 = 6:3$. Uberhaupt, wenn indirecte $ma \cdot a \cdot :: \cdot b \cdot mb$ so ist directe $ma:a = mb:b$ oder $a:ma = b:mb$ Zusatz.

750. Folglich ist in der Proportione reciproca Zusatz.

$$ma \cdot a \cdot :: \cdot b \cdot mb$$

(Wenn sie, wie gehörig, homogenisch angesetzet wird,) das Factum Antecedentium = dem Facto Consequentium, nehmlich $mab = amb$, und stehen ihre Exponenten verkehrt, das ist

$$\frac{ma}{a} \text{ ist} = \frac{m}{1} \text{ und } \frac{b}{mb} \text{ ist} = \frac{1}{m}$$

73. Aufgabe.

751. Zu drey gegebenen Zahlen die vierdte verkehrte Proportional-Zahl zu finden. 73. Aufgabe oder Regula de Tri indirecta, oder conversa.

1.) Formire man aus denen zwey homogenischen Zahlen die erste Ration, setze diejenige, welcher etwas zugeeignet worden, voran, und mache aus ihrem zugeeigneten das Antecedens der andern Ration.

2.) Multiplicire man mit dem Exponenten der ersten Ration das Antecedens der andern.

Z. E. 24 Arbeiter absolviren ein Werck in 15 Tagen, wie geschwind machen es 36 Arbeiter?

Man setze: 24 . 36 :: 15

Expon. $\frac{2}{3}$ — 3) 5 ——— (2

Fac. 10 Tage.

Oder wenn nach solchem Ansatz der Exponente etwa schwehr schiene, multiplicire man beyde Antecedentes, und dividire das Factum mit dem ersten Consequente, als

Wenn der Centner 42 Thl. gilt, giebt man vor ein gewisses Geld 8 Pfund, wie viel bekommt man davon vor solch Geld, wenn der Centner 64 Thl. gilt.

42 . 64 :: 8

8

———

336

8) ———

42

8) ———

Fac. $5\frac{1}{4}$ Pf.

Der Beweiß von beyderley Operationen liegt im vorhergehenden 750. §. und kommt die andere Ration allezeit um so viel ungleich grösser, als die erste ungleich kleiner ist, und vice versa.

Erklär. 752. Eine zusammengesetzte Verhältniß (Ratio composita) wird genennet, so man aus 2, oder mehr

Ratio-

Rationen das Factum derer Antecedentium gegen das Factum derer Consequentium hält.

Z. E. Wenn die Rationes componentes:

3 : 2 || 5 : 7 || 4 : 2

So ist 60 gegen 28 Ratio composita davon.

Uberhaupt wenn *ma* : *a* || *nb* : *b* || *rc* : *c* &c.

so giebt *manbrc* : *abc* Rationem compositam.

753. Jeder rationis compositæ Exponens ist gleich dem Facto, welches die Exponenten der einfachen Rationen zusammen heraus bringen. Als von Lehrsatz.

12 : 3 || 5 : 10 || 6 : 2 sind die Exponenten

$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 6$ und daher ist die Ratio composita =

6 : 1 = 360 : 60

Oder in genere, *manbrc* : *abc* = *mnr* : 1

(§. 691 und 699.)

754. Demnach ist aus einer Proportione Reciproca der Exponens compositæ = 1, und sind die Flächen-Zahlen, deren gleichnahmige Seiten reciproce proportionirt seyn, einander gleich. (§. 750.) Zusatz.

Z. E. Wenn von 2 rechtwincklichten Feldern die Längen 8 und 6 und ihre Breiten 9 und 12,

so sind die Exponenten $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{4}$

und die Composita $\frac{12}{12}$: 1 das ist 1 : 1,

nehmlich beyde Felder sind einander gleich.

755. Hingegen ist aus einer Proportione directa (von 2, 3, und mehr ähnlichen Rationen) der Exponens compositæ die so vielste Potentia exponentis simplicium, als ähnliche Rationes zusammen genommen, z. E. Zusatz.

Aus 2 ähnlichen Rationen componiret man Rationem duplicatam, als von $6:2 = 15:5$ ist 6.15 gegen 2.5, das ist $90:10 = 3^2:1$.

Aus 3 ähnlichen Rationen entstehet Ratio triplicata, als von $2:1 \,||\, 6:3 \,||\, 8:4$ ist $96:12 = 2^3:1$

Uberhaupt: von $ma:a \,||\, mb:b$ ist $m^2ab:ab$
$= m^2:1$

von $ma:a \,||\, mb:b \,||\, mc:c$ ist $m^3abc:abc = m^3:1$

(§ 691.699.)

und also auch in andern Rationibus Multiplicatis.

Zusatz. 756. Folglich ist in ieder Ratione duplicata der Gehalt ihres Antecedentis gegen den Gehalt ihres Consequentis, wie ieder Rationis componentis Quadratum Antecedentis gegen das Quadratum Consequentis, und in der triplicata, wie ieder componirenden Ration ihr Cubus Antecedentis gegen dem Cubo Consequentis, und so weiter.

Denn $m^n:1 = m^nan:an$ (§. 271.) Nun war in vorigen
$mnabc$ &c. : abc &c. $= m^n:1$
Ergo ist m^nabc &c. : abc &c. $= m^nan:an$
$= m^nb^n:b^n$ &c. (§. 242.)

Erklär. 757. Wenn sich zwey gleichnahmige Seiten zweyer Flächen- oder Cörper-Zahlen (§. 468.) nehmlich die Längen, Breiten, und die Höhen gegen einander verhalten

wie $ma:a$ und $mb:b$ desgleichen
wie $na:a \,||\, nb:b$ und nc gegen c

so heissen jene Numeri Plani, und diese Numeri solidi similes, jene entstehen, wenn man eines Länge mit desselben Breite, und diese, wenn man eines Länge mit desselben Breite und Dicke multipliciret, (§. 468.) Deshalber sind sie in Ratione composita, und giebt $m^2ab:ab$ Die Ausdrückung aller Planorum similium.

Und

Und $n^3 abc : abc$ das Symbolum aller Solidorum similium.

758. Demnach sind alle Plani similes in ratione duplicata, und alle Solidi similes in ratione triplicata laterum homologorum. Das ist, die ersten verhalten sich gegen einander wie die Quadrata, und die andern wie die Cubi ihrer gleichnahmigen Seiten. (§. 756.) Zusatz.

759. Auch siehet man hieraus, daß das Factum zweyer ähnlichen Flächen-Zahlen allezeit ein Quadrat, und das Factum zweyer ähnlichen Cörper-Zahlen noch mit einer ihrem Gehalt vermehrt, iederzeit einen Cubum bringet. Zusatz.

Denn $m^2 ab . ab = m^2 a^2 b^2 = (mab)^2$

$n^3 abc . abc . abc = n^3 a^3 b^3 c^3 . = (nabc)^3$

oder $n^3 abc . abc . n^3 abc = (n^2 abc)^3$ (§. 757.)

760. Oder auch, weil die Rationes componentes zu denen Quadrat- und Cubic-Zahlen nicht allein similes sondern auch æquales seyn, (§. 473.) so giebt ein Quadrat mit einem Quadrat, und ein Cubus mit einem Cubo multiplicirt oder dividirt, allezeit wieder ein Quadrat, und wieder einen Cubum, u. s. w. Zusatz.

Denn aus $ma : a \mid ma : a \mid ma : a$ &c.

entstehen alle verschiedene Quadrata $m^2 a^2$ und a^2
wie auch alle verschiedene Cubi: $m^3 a^3$ und a^3 &c.
Davon $m^2 a^2 . a^2$ das Quadrat $(ma^2)^2$
$m^2 a^2 : a^2$ das Quadrat m^2
Desgleichen $m^3 a^3 . a^3$ den Cubum $(ma^2)^3$
$m^3 a^3 : a^3$ den Cubum m^3 giebt. u. s. w.

761. Zwey Zahlen oder Grössen a und b sind in zwey anderer Grössen c und d Ratione subduplicata, wenn Erklär.

sich *a* gegen *b* verhält wie $\sqrt{c}$ gegen $\sqrt{d}$, nehmlich wie die Quadrat-Wurtzel aus *c* gegen der Quadrat-Wurtzel aus *d*. Z. E. $15:10 = \sqrt{9}:\sqrt{4} = 3:2$.

Also verhalten sich die Geschwindigkeiten z. E. in denen Bewegungen zweyer Planeten gegen einander, wie umgekehrt die Radices Quadratæ aus ihren Sonnen-Abständen, und sagt man, ihrer Velocitates seyen in Ratione inversa subduplicata Distantiarum. *

Auf gleiche Weise, wenn $a.b :: \sqrt[3]{c}.\sqrt[3]{d}$, ist *a* gegen *b* in ratione inversa subtriplicata der Grössen *c* und *d*. Und so weiter.

Erklär. 762. Zwey Grössen *a* und *b* sind in zweyer anderer Grössen *c* und *d* Ratione sesquiplicata, wenn sich die ersten gegen einander verhalten, wie die Radices Quadratæ aus der letzten ihren Cubis, (oder auch wie der letzten Cubisch-multiplicirte Quadrat-Wurtzeln) z. E. wenn $a:b = \sqrt{c^3}:\sqrt{d^3}$, ist *a* gegen *b* in Ratione sesquiplicata des *c* und *d* oder wie $c\,3:2 : d\,3:2$.

Also verhalten sich die Zeiten der Umläuffe derer Planeten (Tempora Periodica) gegen einander in Ratione sesquipiicata ihrer Sonnen-Abstände. **

Zusatz. 763. Weil in der Subduplicata $a:b = \sqrt{c}:\sqrt{d}$
so ist auch $a^2:b^2 = c:d$
und da in der Sesquiplicata $a:b = \sqrt{c^3}:\sqrt{d^3}$
so ist auch $a^2:b^2 = c^3:d^3$ (§. 732. XII.) u. s. w.

Erklär. 764. Die componirte Regul de Tri schliesset ihren gesuchten Terminum ordentlicher oder ursprünglicher Weise nicht nach einer einzigen, sondern nach 2 und noch mehr Analogien oder Proportionen.

* Wie auch ** V. Whistoni Prælect. Phys. Mathemat. pag. 122.

765.

765. Jedoch da die gleichnahmigen Termini zwey und mehrer Analogien in einander multiplicirt, wieder eine Proportion geben (§. 732. IIX.) so kan man auch aus sothaner Analogia composita auf einmahl schliessen. Anmerck.

766. Gleichwie aber die Zusammennehmliche Proportiones zweyerley sind, nehmlich directæ und reciprocæ, also kan man auch durch ihre verschiedene Zusammensetzung unterschiedene componirte Reguln formiren. Abtheilung.

Z. E. Zu der so genannten Regula Dupli, oder Quinque (Terminorum) componirt man entweder 1.) zwey directas, 2.) eine directam und eine Reciprocam, 3.) oder zwey Reciprocas.

74. Aufgabe.

767. Wenn eine Grösse (*e*) nach beygemessener Circumstantz (*a*) giebt eine andere gewisse Grösse, (*d*) zu bestimmen, was die grössere oder kleinere erste (*me* = *b*) nach dergleichen veränderten Circumstantz (*na* = *f*) vor eine gleichnahmige andere Grösse (*rd* = *z*) geben werde? 74. Aufgabe, oder Regula de Tri composita, sonst Dupli oder Quinque genannt.

I. In der Directo-directa dividiret man das Factum des dritten, vierdten und 5ten Termini, mit dem Facto des ersten und andern. Als so

Kostgänger Wochen Thl. Kostg. Wochen?

6 in 4 zahlen 42 was geben 10 in 12

4 (12

24) 84

42

5040 (Facit 210. Thl.

12

Bey

Beweiß.

So man den ersten Terminum *e*, den andern *a*, den dritten *d*, den vierdten *b*, den fünfften *f* nennet, und schlieſſet:

$$e : b = d : x$$

Desgleichen $a : f = x : z$

so ist $ea : bf = dx : zx$ (§. 732. IIX.)

und $ea : bf = d : z$ (§. 270.)

$$eaz = dbf$$ (§. 274.)

ea) $$z = dbf$$ (§. 637.)

ea

II. In der Directo-reciproca dividirt man das Factum des ersten, dritten, und fünfften Satzes (nehmlich man multipliciret per saltum) mit dem Facto des andern und vierdten, als

Arbeiter absolviren Klafftern Tagen Arb. dergl. Länge Klafft.
10 eine Länge von 30 in 12, wie bald 20 von 40?

120 (40

4800

600)

Fac. 8 Tage. *

* Mehr dergleichen Exempla sind zu finden in Mr. Clermonts Arithmetique Militaire pag. 190. seq.

Be-

Beweiß.

So man setzet:

$e.b :: d.x$ (§. 747. 748.) und die

erste Ration umkehrt: $b:e = d:x$ (§. 749.)

ferner $a:f = x:z$

so ist $ab:ef = dx:zx$ (§. 732. IIX.)

und $ab:ef = d:z$ (§. 270.)

$abz = edf$ (§. 274.)

Folglich $z = \frac{edf}{ab}$ (§. 637.)

III. In der Reciproco-reciproca dividirt man das Factum des ersten, andern, und dritten Termini, mit dem Facto des vierdten und fünfften, als: In einer Stadt vermuthet man eine Belagerung, daselbst hat man Proviant vor 3450 Mann auf 5 Monat, eine Mund-Portion zu 20 Untzen gerechnet, nun wird die Guarnison biß auf 4000 Mann verstärcket, fragt sichs, wenn solcher Proviant 6. Monat reichen solte, wie schwehr alsdenn eine Mund-Portion seyn müste?

Facit. $14\frac{9}{24}$ Untze.

e	a	d	b	f
3450	„ 5	„ 20	„ 4000	„ 6?
	100		24000	

345|000

24) 109 (14 † 9:24 Untze.

2

Be-

Beweiß.

So man inferiret: $e.b :: d.x$

$a.f :: x.z$, und beyde

reciprocas in directas verwandelt: $b : e = d : x$

$f : a = x : z$

Dann ist: $bf : ea = dx : zx$ (§. 732. IIX.)

$bf : ea = d : z$

$bfz = ead$

$bf)\ z = ead$

$bf.$

Zusatz. 768. Demnach ist die Operation aller dieser drey Regeln gar leicht zu mercken, nehmlich man nimmt in der ersten Regul die drey letzten, in der andern die dreye per saltum, in der dritten die drey ersten zusammen, und dividiret das Product mit dem Facto der beyden übrigen.

Vortheil. 769. Weil der dritte Terminus allemahl das erste Product mit ingrediret, so giebt es ein Compendium, wenn in der ersten Regul $\frac{vf}{\quad}$, in der andern $\frac{ef}{\quad}$, in der dritten $\frac{ea}{\quad}$ zuvor auf Primos inter se reduciret, (§. 360.) und alsdenn erst mit dem dritten $\frac{vf}{\quad}$ multiplicirt werden. Z. E. Mit 280 Thl. gewinnet iemand in 3 Jahren 48 Thl. wie viel gewinnet er mit 630 Thl. in 8 Jahren? Fac. 288 Thl.

e	a	d	b	f
280 —	„3 —	„48 —	„630 —	„8
840		6	5040	
12)				
7	Fac. 288.		42	
7)				
1			6	

Nehmlich weil in der ordentlichen Regul de Tri so wohl $\frac{b}{a}$. c als $\frac{c}{a}$. b oder auch b : $\frac{a}{c}$ den vierdten giebt, (§. 709.) kan man eben sothane Rationes erst auf kleinere Terminos reduciren, und alsdenn multiplicando oder dividendo verfahren.

770. Zuweilen pflegt man gar aus dreyen, oder auch wohl aus 4 Analogien den gesuchten letzten Terminum zu inferiren, woraus denn die so genannte Regul Septem, oder gar Novem (terminorum) gekommen, z. E. 10 Teichgräber verarbeiten 48 Quadrat-Ruthen, so 2 Stich tieff in 9 Tagen, wielange machen 16 Arbeiter über 72 Quadrat-Ruthen, so 3 Stich tieff? Fac. $12\frac{21}{32}$ Tag. Grund der übrigen componirten Reguln.

Indem man inferiret:

16 — „10 — „9? Fac. $5\frac{5}{8}$. (§. 751.)

48 — „72 — „ $5\frac{5}{8}$? Fac. $8\frac{7}{16}$

2 — „ 3 — „ $8\frac{7}{16}$? Fac. $12\frac{21}{32}$

Dher

Oder so man überhaupt die gegebenen 7 Terminos nach ihrer Ordnung a, b, c, d, e, f, g nennet, und wegen der Analogiæ reciprocæ schliesset:

$$e:a = d:x$$
$$b:f = x:z$$
$$c:g = z:y$$

so ist $ebc : afg = dxz : xzy$ (§. 732. IIX.)

und $ebc : afg = d : y$ (§. 270.)

dahero $ebcy = afgd$ (§. 274.)

folglich $y = \frac{afgd}{ebc}$ (§. 637.)

771. Dahero ist der Proceß zur Regula Septem indirecta:

Z. E. Regula Septem indirecta.

Man nehme den ersten, vierdten, sechsten und siebenden zusammen, und dividire das Product mit dem Facto des andern, dritten und fünfften, als:

a	b	c	d	e	f	g
10	„48	„2	„9	„16	„72	„3?

96 — (2 — 192 (8 — 1536)

90 — 6480 — (3 — 19440 | 12 — 1008 — 1536 — 4188 — 202 — 10

Oder $\frac{1008}{1536} \mid \frac{126}{192} \mid \frac{21}{32}$ (8 (6, nehmlich in $12\frac{21}{32}$ Tagen.

772. Auf

772. Auf gleiche Manier kan man auch in denen übri- Anmerk.
gen componirten Reguln verfahren, und darinnen ebener Massen den Vortheil aus §. 769. appliciren.

75. Aufgabe.

773. **Wenn zwey Gantze (A und B) nebst allen Theilen des einen, (c + d + f) gegeben, die eben also sich verhaltende Theile des andern Gantzen zu determiniren.** 75. Aufgabe.

Man inferire: Wie das erste Gantze gegen das andere Gantze, also auch ieder Theil des ersten gegen iedem Theil des andern. Folglich muß man die Regul de Tri so vielmahl wiederhohlen, als Theile gegeben sind. Z. E. Zu einer Composition von 24. Untzen, kommen 3 Ingredientien A 10, B 9, C 5 Untzen. Nun will einer solche Composition nur von 16 Untzen machen, fragt sichs, wieviel er von ieden Ingrediente muß dazu nehmen? Regula Mixtionis.

16
24 giebt 16 was giebt 10? Fac. 6 — von A
24

" " " 9? Fac. 6 von B

8
" " " 5? Fac. 3 — von C.
24

Beweiß überhaupt:

$$A ; B = \begin{cases} c : x = Bc : A \\ d : y = Bd : A \\ f : z = Bf : A \end{cases} \quad (\S.\ 733.\ 710.)$$

774. Es giebt einen Vortheil, so man die erste Ra- Vortheil.
tion, nehmlich die Gantzen also gleich auf die kleinsten

Terminos reducirt, oder aufhebet, als statt 24 : 16, setze man

3 — „ 2 — „ 10 ? Fac. 20 : 3 = = 6 $\frac{2}{3}$ — —

9 ? Fac. 18 : 3 = = 6

5 ? Fac. 10 : 3 = = 3 $\frac{1}{3}$ — —

Summa: 16. so zugleich die Probe.

Anmerckung oder Regula Societatis ohne Zeit.

775. Es wird zwar diese von einigen Regula Mixtionis genennet, sie ist aber nichts anders, als die so genannte Regula Societatis, Lucri vel Damni, oder auch die einfache Regula Falsi, als

Drey Personen A, B, C, legen zusammen in eine Lotterie, A 24. B. 40. C 36 Thl. werden nach der Zeit einig, was sie alle mit einander gewinnen, nach Proportion ihrer Einlagen zu theilen; Nun gewinnen sie in allen 3600. Thl. wie viel gehöret iedem?

Man schliesse: Wie die gantze Einlage gegen dem gantzen Gewinst, also auch iede besondere Einlage gegen dem besondern Gewinst.

24
40
36
---
100 — „ 3600

24 ? Fac. 864 vor A
40 ? Fac. 1440 vor B
36 ? Fac. 1296 vor C

Summa und Probe: 3600 Thl.

Regula Societatis mit Zeit.

776. Wenn gewisse Zeiten bey denen Collatis mit vorkommen, multiplicire man iedwedes Collatum mit seiner Zeit, und verfahre nach vorigen, als

A giebt

A giebt 300 Thl. auf 6 Monat,
B — 500 — 8 Mon.
C — 1000 — 3 Mon.
} Gewinnen 800 Thl.

1800
4000
3000

8) 8800 geben 800 was

11 : 1

1800? (163 7/11 A.
747

4000? (363 7/11 B.
747

3000? (272 8/11 C.
838

Summa: 800 Thl.

Beweiß.

Weil 300 Thl. in 6 Monaten eben so viel gewinnen, als 1800 Thl. in 1 Monat ꝛc. so kan man die Analogien ansehen, als ob sie alle auf einen Monat gerichtet wären, und nach der Regula Dupli inferiren:

8800 in 1 Mon. gewinnen 800 was 1800 in 1 Mon?

Das ist, weil 1 nicht multipliciret:

8800 geben 800 was 1800? (§. 767. I.)

Die erste Ration aber kan man mit 100, und hernach mit 8 aufheben, kommt: 11 gegen 1 wie 1800 gegen seinen Gewinst. (§. 270.)

777. Auf gleiche Manier wird hiernach auch die einfache Regula Falsi expediret, als Regula Falsi simplicis Positionis.

Drey Personen von verschiedenem Alter sind zusamen 144 Jahr alt, B ist doppelt so alt als A, und C so alt als alle beyde. Fragt sichs, wie alt iede? Fac. A. 24. B. 48. C. 72.

Gesetzt die erste wäre 20 Jahr alt.
die andere 40.
so ist die dritte 60.

Summa: 120. so aber falsch.

Derowegen inferire man:

120 — „ 144 was { 20? 40? 60?

8) 15 18

3) 5 6

Fac. { 24 (4 48 (8 72 (12 } (§. 712.)

Anmerck. 778. Man braucht zwar diese Regul mehrentheils nur, wenn die gesuchte Zahl nach gegebenen Proportionen vergrössert oder verkleinert ist, iedoch langet sie auch noch zu, wenn schon nach geschehener Proportionirung etwas dazu gethan, oder hinweg genommen worden, denn solches kan man vorhero nur wiederum subtrahiren oder addiren, und alsdann wie vorhin verfahren, z. E. Von einer vergessenen Länge hat man noch dieses behalten, daß ein Drittel, Viertel und Sechstheil davon † 8 Schuch just 80 Schuch ausgemachet, wie groß ist nun die vergessene Länge gewesen?

Gesetzt 12 Schuch — Probe:

so ist das Drittel 4 — 96
Viertel 3 — 80 — 32
Sechstheil 2 — ÷ 8 — 24
16
Summa: 9 giebt 72 — „ 12? 8
1/8)
Fac. 96 80

779. In

779. In der Regula Falsi duplicis Positionis nimmt man sich zwey beliebige Zahlen oder (Hypotheses) so klein als möglich, die iedoch so beschaffen, daß man mit ihnen nach dem Inhalt der Aufgabe operiren kan. Regula Falsi duplicis Positionis.

Wenn nun die genommenen Hypotheses beyderseits juxta tenorem Quæstionis berechnet, und die wahre Zahl nicht gefunden worden, so subtrahire man

I. Das erste falsch-heraus gebrachte von andern falsch-heraus gebrachten, kömmt die erste Differentz.

II. Das erste falsch-heraus gebrachte von dem wahren herauszubringenden, kömmt die andere Differentz.

III. Die erste Hypothesin von der andern Hypothesi, kömmt die dritte Differentz.

Alsdenn inferire man:

Wie die erste zur andern, also auch die dritte Differentz zur Differentz der ersten Hypothesis von der gesuchten Zahl.

Addiret man nun die letztgefundene Differentz zur ersten Hypothesi, so kommt die gesuchte Zahl, von welcher die andern dependiren. (§. 734. 735. 255.)

Z. E. Titius legiret seinen 3 guten Freunden 1000 Thl. B soll anderthalb mahl so viel kriegen, als A, und C soll den 5ten Theil so viel kriegen als vorige beyde und noch 40 Thl. zu etwas gewisses. Wie viel bekömmt nun ein ieder?

Gesetzt A bekäme	4	oder auch 8
so kriegt B	6	„ 12
= = = C	2	4
	†40	†40
	52	64 soll aber 1000 seyn.

I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.
12 —	„ 948 —	„ 4

3) 316 (§. 712.)

Hierzu addire 4 die erste Hypoth.

Bekommt A	• •	320
B	• •	480
C	• •	160
	†	40

Summa und Probe: 1000. Thl.

Beweiß.

Uberhaupt wenn in $\begin{matrix} a & b & x \\ m & m & m \end{matrix}$

$am \quad bm \quad xm = F.$

Das allerseits in Factis hinzugethane oder hinweg genommene ihre Differentz nicht ändert, (§. 735.) so sey

$bm - am = d$
$F - am = g$
$b - a = h$

Dann ist $d : g = h : x - a$ (§. 734.)

folglich $dx - ad = gh$ (§. 274.)

$dx = gh + ad$ (§. 634.)

$x = \frac{gh + ad}{d} = \frac{gh}{d} + a.$ (§. 637.)

Anmerck. 780. So $bm < am$ setze man statt d die Differentz $-d$, und so $F < am$ setze man $-g$, und verfahre in der Operation wie sichs bey dem Zeichen-Wechsel gehöret.

Man

Man muß aber nicht dencken, als ob man mit solcherley R. Falsi alle schwehre Aufgaben überwältigen könte, denn wo und wie weit sie nur etwa hinlange, hat der P. Tacquet allbereit mit angemercket, * und ist sich dabey so sehr nicht aufzuhalten, indem die Algebraischen Solutiones ungleich weiter um sich greiffen.

781. Wie aus dem gegebenen Werth aller Miscibilium der Werth des daraus entstandenen Mixti zu erfahren, desgleichen wie man einige Dinge von unterschiedenem Werth oder Gehalt also zusammen vermischen könne, daß die Vermischung einen gegebenen mittlern Werth oder Gehalt betrage, lehret die genannte Regula Alligationis, oder Allegationis, die von Ligaturis oder Anbindungen, oder von Lega, nehmlich der Zusammensetzung des reinern und des unreinern also genennet worden. Erklär.

76. Aufgabe.

782. Aus dem gegebenen Gehalt und Werth aller Miscibilium den Gehalt oder Werth des daraus entstandenen Mixti zu berechnen. 76. Aufgabe.

Man multiplicire das gegebene Maaß oder Gewicht eines ieden Miscibilis mit seinem Werth oder Gehalt, und dividire die Summe der Producten mit der Summa derer gegebenen Maase oder Gewichte, so giebt der Quotus den verlangten Werth des Mixti.

Z. E. Einer hat Silber, 4 Marck 6 Löthiges, 9 Marck 10 Löthiges, 16 Marck 14 Löthiges, will solches alles

* P. Taquet in Arithm. Practica Lib. IV, Cap. V.

zusammen schmeltzen, wie viel-löthig wird die gantze Massa werden? Fac. $\frac{19}{29}$ — Löthig.

4 ——	6	24
9 ——	10	90
16 ——	14	224

29) 338 (11 $\frac{19}{29}$

111

149

11

2

1

Beweiß.

Gesetzt man hätte A Marck a Löthig, B Marck b Löthig, C Marck c Löthig, &c. so kan man inferiren:

I. 1. Marck hält $\left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right.$ Loth $\left\}\right.$ was $\left\{\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right.$ Marck? $\left\{\begin{matrix} \text{Fac. } a\,A \\ \text{Fac. } b\,B \\ \text{Fac. } c\,C, \text{ \&c.} \end{matrix}\right.$

II. $A + B + C$ halten $aA + bB + cC$, was 1 Marck?
Fac. $aA + bB + cC$ &c.

$A + B + C$ &c.

77. Aufgabe.

77. Aufgabe. 783. Zwey Dinge von geringen und guten Gehalt oder Werth, also mit einander zu vermischen, daß das Vermischte hernach von einem gegebenen Mittel-Werth oder Gehalt sey?

Man subtrahire den Mittel-Gehalt vom besten, so kömmt der Zehler, hernach den schlechten Gehalt vom besten, so kommt der Nenner des Bruchs, welcher anzeiget, wie viel vom schlechten Miscibili zu nehmen.

Z. E.

Z. E. Ein Oeconomus hat gering und gut Getrände, vor den Scheffel geringes bekommt er 38 Gr. vor das gute 54 Gr. Jenes ist denen meisten zu schlecht, und dieses zu theuer, derowegen will er den Scheffel gerne auf 2 Rthl. oder 48 Gr. mischen, wie viel muß er nun von den geringern nehmen?

38 | 48 | 16 Fac. $\frac{6}{16}$ oder $\frac{3}{8}$ des schlechten,
54 |

54-48 = 6 | und folglich $\frac{5}{8}$ des besten,

Nehmlich so offe er vom geringern nimmt 3 Scheffel, so offt nimmt er vom guten 5 Scheffel.

Beweiß.

Gesetzt, er nehme x Theile des geringern, so nimmt er $1-x$ Theile des besten.

Wenn nun der geringste Preiß = h, der beste = l, und der Mittel-Preiß = m, so schliesset man:

1 giebt h was x? Fac. hx

1 giebt l was $1-x$? Fac. $l-lx$.

Dahero muß $l+hx-lx = m$ seyn.

Dann ist: $l+hx = m+lx$

$l-m = lx-hx$

folglich $\frac{l-m}{l-h} = x$.

78. Aufgabe.

784. Wenn man von vielen Miscibilibus unterschiedenes Gehalts oder Werths des schlechten (ex Hypothesi) so und so viel, 78. Aufgabe.

des bessern so und so viel ꝛc. nehmen, und einen verlangten Mittel-Werth oder Gehalt draus machen will, zu erfahren, wie viel man noch von dem besten dazu zunehmen habe.

1.) Setze man den Gehalt oder Werth vom schlechtesten biß zum besten ordentlich unter einander, und den verlangten Mittel-Gehalt bey Seite.

2.) Subtrahire man die schlechtern Werthe nach der Reihe von dem besten, setze die Differentzen gegen über, und multiplicire iede mit ihrer angenommenen Hypothesi.

3. Nehme man die Differentz des mittlern vom besten Werth zum Zehler, so giebt die Summa voriger Producte den Nenner zu dem gesuchten Bruch, mit welchem man iede Hypothesin noch verificiren muß. Z. E.

In einem Gieß-Hauß hat man Vorräthe von feinem Metall, den Centner à 24, à 30, und à 42 Thl. Hieraus soll ein Werck, à 60 Centner gegossen werden, welches aber ohne Arbeits-Lohn nicht höher als 1740 Thl. kommen soll. Fragt sichs, wie viel vom iedem Metall mit dazu könne geschmeltzet werden?

Gesetzt, man nehme vom erstern Metall 3 Theil, und von dem etwas bessern 2 Theile. Desgleichen erfinde man vorhero den Mittel-Preiß, nehmlich man inferire:

Thl.
60 Cent. —„ 1740 —„ 1 Cent?

6) ——
Fac. 29. Thl.

Darauf kommen die Ansätze so zu stehen:

Hypoth.

Hypoth.

24		18	. 3	=	54	13
30	29	12	. 2	=	24 kommen	— vor
42						78

78 den gesuchten Bruch.

Demnach nimmt man vom ersten 3 mahl 13 oder 29
vom andern 2 mahl 13 oder 26

Summa: 65

78

Folglich nimmt man vom dritten 1 mahl 13

$$\text{oder } \frac{13}{78},$$

Nehmlich so offt man nimmt vom schlechtesten 3 Centner, so offt nimmt man vom bessern 2, und vom besten nur 1 Centner:

Dahero kan man nun nach obiger Regula Mixtionis (§. 773.) folgenden Ansatz machen:

6 giebt 60 was { 3? Fac. 30. Cent. des ersten. / 2? Fac. 20. Cent. des andern. / 1? Fac. 10. Cent. des dritten.

Das ist: 1 — „ 10 — „

Summa: 60. Centner.

Probe:

Cent.		Thl.		
30	à	24	=	720
20	à	30	=	600
10	à	42	=	420

Summa: 1740 Thl.

Ein Müntz-Meister hat viererley Silber, 7, 8, 12 und 13 Löthiges, will daraus 10 Löthiges machen, und weil

weil er des andern wohl dreymahl so viel hat, als des ersten, und des dritten ohngefehr doppelt so viel, als des ersten, so hat er Willens, so offt einen Theil vom ersten, als dreye vom andern, und zweye vom dritten zu nehmen, fragt sichs, wie viel nun nach dieser Hypothesi noch vom besten dazu zu setzen sey?

Hypoth.

7		6 . 1	=	6	3
8		5 . 3	=	15	kommen — vor
12	10	1 . 2	=	2	23
13					— den gesuchten Bruch.

23

Demnach nimmt er des ersten $\frac{3}{23}$, des andern $\frac{9}{23}$, des dritten $\frac{6}{23}$ und folglich des besten $\frac{5}{23}$, oder, so er des ersten nimmt 3 Marck, nimmt er des andern 9 Marck, des dritten 6 Marck, und des vierdten 5 Marck. (§. 362.)

Probe:

3	. 7	=	21
9	. 8	=	72
6	. 12	=	72
5	. 13	=	65

23) 230 (Fac. 10 Löthig. (§. 782.)

Beweiß.

So die Gehalte oder Werthe vom schlechtesten biß auf den besten, g, h, l &c. der Mittel-Gehalt $= m$, die beliebigen Sätze, oder Hypotheses $a\,x$, $b\,x$ &c. und $a + b = c$, so nimmt er vom besten $1 - c\,x$. Folglich kan man setzen:

1 giebt

1 giebt g was ax? Fac. gax
1 — // b — // bx? Fac. bbx
1 — // l — // $1-cx$? Fac. $l-lcx$.

Summa $l \dagger gax \dagger bbx - lcx = m$

$l - m \dagger gax \dagger bbx = lcx$

$l - m = lcx - gax - bbx$

$$\frac{l-m}{lc-ga-bb} = x$$ das ist, so man

vor c die specielle Summe $a+b$ substituiret, kommt $la+lb-ga-bb = (l-g)a+(l-b)b$

Derowegen ist $$\frac{l-m}{(l-g)a+(l-b)b} = x$$ und so weiter.

Anmerck. 785. Auf gleiche Art gehet es auch mit mehrern Sorten, und belieben viele diese Solution vor der gewöhnlichen, weil man meist anfangs die Miscibilia nach Gefallen kan aufschreiben. Denn ob wohl die Summe der gefundenen Proportionen bißweilen von der Summa Productorum nicht kan abgezogen werden, so ist es doch bald zu sehen, und braucht nichts mehr, als etwa nur von einer der geringern Sorten so gleich eine andere Hypothesin zu nehmen.

Anmerck. 786. Unterdessen hätte man auch die schlechteste Sorte an statt der besten zuletzt setzen, und dennoch nach obiger Regul verfahren können, z. E. Einer hat Wein, die Kanne vor 12, 8 und 6 Gr. will ihn mischen daß die Kanne à 10 Gr. komme, so er nun z. E. zu 5 Kannen guten 2 Kannen schlechtern giessen wolte, wie viel müste er nun nach solcher Proportion von dem geringsten noch darein mischen? Fac. $1\frac{1}{2}$ Kanne.

12		6	5	30	4	2	
8	10	2	2	4	—	—	
6				—	34	=	17
				34			

Das

Dahero nimmt er des besten 10
des schlechtern 4
und des geringsten 3 17 Theil.

Oder so offt er vom ersten nimmt 10 Kannen, so offt nimmt er des andern 4 und des dritten 3 Kannen, folglich so er nimmt 5 Kannen und 2 Kannen, muß er des schlechtesten $1\frac{1}{2}$ nehmen.

Probe:

10 Kannen à 12 thun 120 Gr.

4	—— „	8	— „ 32
3	—— „	6	— „ 18

17) 170 (F. 10 Gr. S. 782.)
„

Anmerck. 787. Es hat die Alligations-Regul nicht allein in Haußhaltungs-Gieß-Schmeltz- und Müntz-Wesen ihren guten Nutzen, sondern man bedienet sich auch derselben überhaupt in der Physic, wenn man die Veränderungen und Kräffte der vermischlichen Dinge gehörig untersuchen will.

IV. Capitel.

Von der Æquatione Numerorum.

§. 788.

Erklär. Wenn man durch die Reduction (s. 630. seqq.) die gleicherfundenen Grössen also geordnet hat, daß auf einer Seite die unbekannten entweder gantz alleine, oder auch noch untermischt, auf der andern Seite aber die bloß bekannten, oder auch die Nulle oder Zero gantz alleine zu stehen komen, so heist man diese Ordnung eine Æqua-

oder

tion oder Gleichung, deren Gehalt zwar auf beyden Seiten gleich groß, aber doch unterschiedlich angedeutet ist, als: I. $x^2 + x = 156$

II. $x^3 - 6x^2 + 24x = 360$

III. $x^4 - px^2 + qx - m^4 = 0$

IV. $x^m - ax^{m-1} = a^2 b^{m-2}$ &c.

sind Æquationes, darinnen man die Terminos nach der Ordnung ihrer unbekannten Potentzen setzet, die ihnen vorstehende bekannte Zahlen oder Buchstaben ihre Coëfficientes, oder Zehler, und den letzten Terminum, (so sich mit gar keiner unbekannten Grösse vermischt,) die ledige Quantität oder Zahl, oder auch Homogeneum Comparationis nennet.

Z. E. in vorhergehenden Gleichungen ist 156
oder 360.
oder m^4 oder auch $a^2 b^{m-2}$.
die ledige Quantität, oder das Homogeneum Comparationis.

789. Wo vor einem Termino kein Zehler oder Coëfficiens stehet, da ist es so viel, als stünde die Unität vor. (§. 18.) Anmerck.

790. Eine reine oder einfache Gleichung (Æquatio pura oder simplex) ist diejenige, wo nur eine, oder auch einerley Potentz der unbekannten Grösse stehet, als: Erklär.

$x^3 = 1331$. || $4x^2 + 20 = 3x^2 + 36$ giebt die reine Gleichung $x^2 = 16$.

Hingegen ist eine unreine oder zusammen gesetzte Gleichung, Æquatio impura, composita, oder affecta, darinnen unterschiedene Potentzen der unbekannten Grösse angetroffen werden, dergleichen sind in obigem 788 s. alle vier Arten.

791. Eine vollständige Gleichung, (Æquatio completa) wird genennet, wo die unbekannten Potentzen von der Erklär.

grö-

grösten anzufangen, alle nach ihrer absteigenden Ordnung folgen, hingegen eine unvollständige, oder incompleta ist, wo einige dazwischen fehlen,

Z. E. $x^3 + 8x^2 - 205x = 420$ ist complet. Hingegen
$x^3 + 80x = 1449$ ist incomplet, denn x^2 fehlet.

Erklär. 792. Die Wurtzel aus einer Gleichung ist der Werth oder Gehalt der unbekannten Grösse, dessen gleichnahmige Potentzen in die correspondirende Zehler der unbekannten multiplicirt, zusammen die ledige Zahl, oder des Homogeneum Comparationis just heraus bringen, als von

$1x^3 + 2x^2 + 4x = 57$ ist die Wurtzel 3
denn 27 9 3 in obige Zehler multipl. giebt
27 + 18 + 12 = 57.

Erklär. 793. Eine wahre Wurtzel heist, deren Werth eine positive Grösse anzeiget, als 3 ist eine wahre Wurtzel aus voriger Gleichung. Hingegen heist eine falsche Wurtzel, deren Werth mit einer privativen Grösse angedeutet wird, als aus $x^2 - 2x - 24 = 0$ ist die wahre Wurtzel 6, u. die falsche -4 denn $36 - 12 - 24 = 0$, oder auch
$16 + 8 - 24 = 0$.

79. Aufgabe.

79. Aufgabe. 794. Aus etlichen nach belieben angenommenen Wurtzeln, allerhand Gleichungen zu formiren, und ihre Eigenschafften dabey zu untersuchen.

1.) Bringe man die Wurtzel, so der unbekannten Quantität x zugeeignet worden, durch Versetzung hinüber, damit man einfache Æquationes bekomme, deren iede $= 0$ sey. (§. 634.)

2.) Mul-

2.) Multiplicire man die einfachen Æquationes in einander, so entstehen daraus nach und nach die Höhern, deren iede unendlich fort = o bleibet, (§. 263.)

Als wenn $a > b$, Z. E. $a = 5$, $b = 2$, ferner $a + b = c$,
Desgleichen $a - b = d$, und man setzet:

I.

$x = -a = -5$
$x = -b = -2$

So ist $x + a = 0$
$x + b = 0$

Und $xx + cx + ab = 0$

Oder $xx + 7x + 10$

II.

$x = -a = -5$
$x = b = 2$

$x + a = 0$
$x - b = 0$

$xx + dx - ab = 0$

Oder $xx + 3x - 10$

III.

Wenn $x = a = 5$
$x = b = 2$

so ist: $x - a = 0$
$x - b = 0$

Und $xx - cx + ab = 0$

Oder $xx - 7x + 10$

IV.

$x = a = 5$
$x = -b = -2$

$x - a = 0$
$x + b = 0$

$xx - dx - ab = 0$

Oder $xx - 3x - 10$

Aus der Genesi dieser Gleichungen observiret man folgendes:

I.) Kömmt die Summe der Wurtzeln, iedoch mit ihrem veränderten Zeichen allezeit im Zehler des andern Termini zum Vorschein.

II.) Und wo die ledige Zahl — hat, giebt der Zehler des andern Termini zugleich auch die Differentz beyder Wurtzeln, (wenn man sie nehmlich schlechthin und ohne Signo betrachtet.)

III.) Kömmt das Factum der beyden Wurtzeln mit seinem unveränderten Signo allezeit in der ledigen oder blossen Zahl zu Gesichte.

IV.) Folglich, wo die ledige Zahl + hat, sind beyde Wurtzeln entweder lauter wahre, oder lauter falsche, jenes wenn —, und dieses wenn + im andern Termino anzutreffen. (§. 232. und 224. I.)

V.) Wo aber die ledige Zahl — hat, und + im andern Termino stehet, hat die kleinere Wurtzel auch +, und wo im andern — stehet, hat die kleinere auch —, nehmlich im ersten Fall ist sie die wahre, und im andern Fall die falsche Wurtzel. (§. 224. 3.)

Z. E. Wenn $x^2 - 5x - 24 = 0$ sind die Factores von 24, die kleinern Zahlen 2, 3, 4, 6, 8, 12 darunter 3 und 8 um 5 differiren, daher ist die kleinere Wurtzel -3 und grössere 8. (Num. II. und V.)

Denn $1x^2 - 5x - 24 = 0$ multiplicirt mit

+9 und -3 (statt xx und x,) giebt

$$+9 + 15 - 24 = 0$$

Oder mit 64 + 8, giebt

$$64 - 40 - 24 = 0$$

Desgleichen, wenn $xx + 22x - 779 = 0$, so sind die Factores von der ledigen Zahl 19 und 41. (vide Anat. Num. sub hoc numero) derowegen ist die wahre Wurtzel 19 und die falsche — 41. (No. II. und V.)

Ferner so $xx - 20x + 91 = 0$ so sind die beyden Wurtzeln 7 und 13 wahre Wurtzeln, so zusammen 20 machen. (Num. I. und IV.)

Endlich wenn $x^2 + 7x + 12 = 0$, so sind die Factores von 12, die kleinern Zahlen 2, 3, 4, 6, darunter 3 und 4 zusammen 7 machen, und daher die beyden falschen Wurtzeln zu sothaner Æquation abgeben. (Num. I. und IV.)

795. Wenn man (der kürtze halber) den Zehler des Zusatz. andern Termini p, und die ledige Zahl q nennet, so giebt im vorigen §.

Die I. Gleichung $x^2 + px = -q$
Die II. = = = $x^2 + px = +q$
Die III. = = = $x^2 - px = -q$
Die IV. = = = $x^2 - px = +q$ (§. 634.)

80. Aufgabe.

796. **Die Wurtzeln aus vorhergehen, den Quadratischen Æquationen überhaupt zu bestimmen.** 80. Aufgabe.

Man ergäntze das unvollkommene Quadrat des ersten Membri mit dem Quadrat vom halben Zehler des andern Termini, (§. 542.) und addire dis letzte Quadrat auch zur ledigen Zahl des andern Membri (§. 640.) Extrahire beyderseits Radicem, (§. 532, oder 538.) und transponire den herauskommenden vorigen halben Zehler, (§. 634.) daß die unbekannte Grösse auf einer Seite gantz alleine bleibet.

In der I. $= -q$
und II. Gleichung ist $xx + px = +q$

Und $xx + px + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q + q$

Dahero ist $\left\{\begin{matrix} x + \frac{1}{2}p \\ -\frac{1}{2}p - x \end{matrix}\right\} = V\frac{1}{4}pp - q + q$

(§. 533. 542.)

In der III. $= -q$
und IV. Gleichung ist $xx - px = +q$

Und $xx - px + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q + q$

Dahero $\left\{\begin{matrix} x - \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}pp - q} + q$

So man nun nach dem 634 §. in allen vier Gleichungen das $\frac{1}{2}p$ also transponiret, daß x auf einer Seite nur alleine zu stehen kömmt, giebt

I. $x^2 + px + q = 0$	$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$
II. $x^2 + px - q = 0$	$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$
III. $x^2 - px + q = 0$	$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$
IV. $x^2 - px - q = 0$	$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

Zusatz. 797. Weil $\frac{1}{2}p > \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$ und $\frac{1}{2}p < \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$, so ist auch hieraus zu sehen, daß (vermöge der Addition solcherley ungleichen Grössen,) in der I. Gleichung, wo die Signa gar nicht abwechseln, beydes falsche Wurtzeln seyn. Desgleichen daß in der II und IV. Gleichung, wo die Signa nur einmahl abwechseln, iede eine wahre und eine falsche Wurtzel hat, und endlich daß in der III. Gleichung, wo die Signa zweymahl abwechseln, beydes wahre Wurtzeln seyn. (s. 793.) Z. E. Aus den Æquationen

I. $xx + 14x + 48 = 0$ ist $x = -6$ oder -8
II. $xx + 2x - 48 = 0$ ist $x = 6$ oder -8
III. $xx - 8x + 12 = 0$ ist $x = 2$ oder 6
IV. $xx - 2x - 24 = 0$ ist $x = -4$ oder 6

(§. 794. I — V.)

798. So

798. So man eine quadratische Gleichung, z. E. $xx - 2x - 24 = 0$ wieder mit einer einfachen neuen Gleichung als $x - 3 = 0$ multiplicirt, entstehet eine Cubische Æquation $x^3 - 5x^2 - 18x + 72 = 0$ darinnen die Wurtzeln (vermöge der quadratischen) $-4, +6$, und (vermöge der angenommenen neuen) $+3$ sind. Worinnen man gleicher Gestalt wahrnimmt, daß der Zehler des andern Termini aus der Summe aller Wurtzeln, der Zehler des dritten Termini aus der Summe derer Producten von 2 und 2 Wurtzeln, (nehmlich von $-24 - 12 + 18$) und die ledige Zahl aus dem Facto aller drey Wurtzeln bestehet. Ingleichen daß so viel wahre Wurtzeln darinnen, als Abwechselungen der Zeichen, und so viel falsche, als Folgungen von einerley Zeichen sind. Erklär.

799. Daferne man eine Cubische Gleichung wiederum mit einer neuen einfachen, oder auch zwey verschiedene Quadratische in einander multipliciret, entstehet eine Quadrato-quadratische Gleichung, welche ebenfalls die vorigen Eigenschafften hat, nehmlich daß der Zehler des andern Termini aus der Summe aller Wurtzeln, des dritten aus der Summa Productorum von 2 zu zwey, des vierdten aus der Summa Productorum von drey zu drey Wurtzeln bestehet, und das Homogeneum Comparationis oder die ledige Zahl gleichergestalt das Factum aus allen Wurtzeln sey, nicht weniger, daß auch so viel wahre Radices darinnen, als Abwechselungen der Zeichen, und so viel falsche, als Folgungen von einerley Zeichen in solcher Æquation vorkommen. Z. E. Wenn die zwey quadratischen Gleichungen $xx - 5x + 6 = 0$ und $xx + 3x - 4 = 0$ in einander multiplicirt werden, entstehet die Quadrato-Quadratische Æquation Erklär.

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$$

welche drey wahre und eine falsche Wurtzel hat, nehmlich 1, 2, 3, und — 4. Und so man diese Gleichung wieder mit einer einfachen multipliciren, und alle jetzt erwehn-

wehnte Eigenschafften dabey untersuchen wolte, würde das vorige alles auch wieder darinnen wahr zu nehmen seyn, und so weiter.

Zusatz. 800. Demnach hat iede Æquation so viel Wurtzeln, als ihr erster oder gröster Terminus Dimensionen hat, nehmlich die Quadratischen Gleichungen haben 2, die Cubischen 3, die Biquadratischen 4 Wurtzeln, und so weiter.

Zusatz. 801. Da nun die Division wieder auseinander nimmt, was die Multiplication zusammen gesetzet, so muß auch ieder Factor aus dem Homogeneo Comparationis, der die Æquation dividendo aufhebt, und zuletzt in seiner zugeeigneten Gleichheit wiederum eben also zum Vorschein kömmt, die richtig getroffene Wurtzel von solcher Æquation seyn. Denn so man aus dem Homogeneo Comparationis ab, oder abc ꝛc. einen Factorem $a = x$ setzet, so lässet sich die gantze Gleichung damit hinaus dividiren, und kömmt a endlich wiederum $= x$, wie aus folgender Quadratischen und Cubischen, und auch so fort denen übrigen Gleichungen zu ersehen stehet, z. E.

$$\begin{array}{l} xx + bx = ab \quad \text{dividirt mit} \\ \quad - ax \\ \hline x = a) \; x + b = b \\ \quad - a \\ \hline x = a \end{array}$$

Desgleichen

$$\begin{array}{l} xxx - cxx - bcx = -abc \quad \text{dividirt} \\ \quad + bxx + acx \qquad\qquad \text{mit } x = a \\ \quad - axx - abx \\ \hline \text{giebt: } xx - cx - bc = -bc \\ \quad + bx + ac \\ \quad - ax - ab \end{array}$$

Folglich

Folglich ist $xx - cx$

$+bx \quad +ac = ab$ (§. 632. 634.)

$-ax$ diese wieder dividirt

mit $x = a$) $x - c$

$+b \quad +c = b$

$-a$ giebt endlich

wiederum $x = a$, und so auch in übrigen.

81. Aufgabe.

802. Zu finden ob eine gegebene Gleichung Rational-Wurtzeln habe, und welche es im solchen Fall seyn dürfften. 81. Aufgabe.

Weil das Homogeneum Comparationis oder die ledige Zahl das Factum aus allen Wurtzeln ist, (§. 794. III. 798. 799.) so dividire man mit einem und dem andern Factore, und zwar mit einem auf einmahl die gantze Gleichung hindurch, wird nun zuletzt die unbekannte Gröffe (x) dem gebrauchten Factori wiederum gleich, so ist er eine, wo nicht, so ist er keine Wurtzel von solcher Æquation, z. E.

Wenn $x^2 - 8x = 105$, so siehet man bald, daß die Factores, 3, 5 und 7 nicht zu reichen, derowegen setze man $x = 15$, und dividire damit hinein, kommt $x - 8 = 7$, das ist $x = 15$. Daher 15 eine wahre Wurtzel von solcher Gleichung, und da sie mit ihrer andern Wurtzel muß $+8$ machen (§. 794. I.) so ist solche andere Wurtzel $= -7$.

Es sey aus obiger Cubischen Gleichung (§. 798.) der aus der ledigen Zahl erwehlte Factor $3 = x$, so geschiehet die Division gar leichtlich; Nehmlich so

$xxx - 5xx - 18x = -72$ ist, und

$x = 3)\ xx - 5x - 18 = -24$

davon $xx - 5x = -6$

$x = 3)\ x - 5 = -2$

$x = 3$

Oder man erwehle den Factorem 6, kömmt aus

$xxx - 5xx - 18x = -72$ divid.

mit $x = 6)\ xx - 5x - 18 = -12$

das ist: $xx - 5x = 6$ dis ferner divid.

mit $x = 6)\ x - 5 = 1$

$x = 6$

Also sind beyde wahre Wurtzeln 3 und 6, und da sie mit der dritten müssen + 5 machen, (§. 794. I.) so ist die dritte — 4. Denn $3 + 6 - 4 = 5$. Der Beweiß liegt im vorhergehendem §.

Anmerck. 803. Weil auch in ieder Gleichung so viel wahre Wurtzeln sind, als Verwechselungen der Zeichen, (§. 794. 799.) darff man nur die Zeichen, eins um das andere verändern, so werden die falschen Wurtzeln in wahre verwandelt, und alsdann kan man auch bequehmlich die falschen heraus dividiren, als so man setzet:

$xxx + 5xx - 18x - 72 = 0$ und divid. mit

$x = 4) \; xx + 5x - 18 - 18 = 0$

das ist: $xx + 5x = 36$ ferner mit

$x = 4) \; x + 5 = 9$

ist $x = 4$,

Und weil transmutiret, ist in der ersten Gleichung

$x = -4$.

804. Da überhaupt die Factores $x \pm a = 0$, $x \pm b = 0$, $x \pm c = 0$, $x \pm d = 0$ ꝛc. das Homogeneum Comparationis $\pm abcd$ constituiren, so muß sich solches auch wieder darein zergliedern lassen. Derowegen kan man auch die gegebene Æquation mit $x \pm a$ dividiren, gehet dann alles auf, so kömmt eine um einen Grad niedrigere Gleichung, diese dividire man wieder mit $x \pm b$, und so kein Rest bleibet, kömmt eine noch niedrigere, und so weiter; Endlich sind die Wurtzeln der ersten Æquation $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$ &c. Z. E. Wenn man folgende Gleichung $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ mit $x - 5$ dividiret, kommt eine Quadratische $x^2 + 2x - 3 = 0$ und so man diese wiederum mit $x + 3$ aufhebet, kömmt der Quotus $x - 1 = 0$. Dahero sind die Wurtzeln aus der gegebenen Cubischen Gleichung $+5$, -3 und $+1$. Anmerck.

Auf gleiche Weise kan man auch die Biquadratische Gleichung durchs Aufheben in niedrigere Æquationes verwandeln, deren Divisores wiederum die Wurtzeln anzeigen, als so

$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

$+ 1x^3 - 10x^2 + 8x$

$(x - 3)$

ist $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$

$+ 3x^2 - 4x$

$(x - 2)$

und $x^2 + 3x - 4 = 0$

$+ 4x$

$(x - 1)$

$x + 4 = 0$

Davon demnach die Wurtzeln 3, 2, 1, und — 4 sind.

82. Aufgabe.

82. Aufgabe. **805. Aus einer Æquation den andern Terminum herauszuwerffen.**

1.) Dividire man den Zehler des andern Termini mit dem Exponenten des ersten, und nachdem solcher Zehler negativus oder affirmativus ist, setze man, die Wurtzel aus der gegebenen Æquation sey $= y \pm$ dem gefundenen Quot.

2.) Die also angenommene Wurtzel substituire man durch und durch in der gegebenen Gleichung, so kommt eine neue, in welcher der andere Terminus fehlet, und $y = x \pm$ dem gefundenen Quot.

Als so man den andern Terminum wegschaffen wolte aus

$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$, setze man

$x = y + 2$. Denn $6 : 3 = 2$. so ist

$x^2 = y^2 + 4y + 4$

$x^3 =$	$y^3 + 6y^2 + 12y + 8$	
$-6x^2 =$	$-6y^2 - 24y - 24$	
$+5x =$	$+5y + 10$	
$+12 =$	$+12$	

Summa $y^3 * -7y + 6 = 0$

In welcher neuen oder transformirten Gleichung

$y = x - 2$.

Eben dieses sey in folgender Æquation zu thun, allwo

$x^3 + 2x^2 - 7x - 68 = 0$, da setze man

$x = y - \frac{2}{3}$ so ist

$x^2 = y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

und $x^3 =$	$y^3 - 2y^2 + \frac{12}{9}y - \frac{8}{27}$	
$+2x^2 =$	$+2y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{8}{9}$	
$-7x =$	$-7y + \frac{14}{3}$	
$-68 =$	-68	

Summa $y^3 * - \frac{75}{9}y - \frac{1694}{27} = 0$

Allwo $y = x + \frac{2}{3}$

Nun

Nun hebt sich nach dem 802 §. die erste Æquation mit 4 auf, folglich ist in der letzten

$$y = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Denn $y^3 = 2744 : 27$

$$-\frac{75}{9}y = -1050 : 27$$

$$-\frac{1694}{27} = -1694 : 27$$

Summa $= 0$

Beweiß.

Wenn aus der undeterminirten Gleichung:

$x^n - a x^{n-1}$ ꝛc. der andere Terminus heraus soll, setze man $x = y + q$, so ist

$x^{n-1} = y^{n-1} + {}^{n-1}y^{n-2}q$ &c. (§. 501.)

Und $x^n = y^n + n y^{n-1} q$ &c. (§. 499.)

Alsdann ist $-a x^{n-1} = -a y^{n-1} - (n-1) a y^{n-2} q$ &c.

Allwo der andere Terminus $+n y^{n-1} q$ ist, dahero so er hinweg soll, muß $nq - a = 0$ werden, folglich muß $nq = a$, und $q = \frac{a}{n}$ seyn.

Zusatz. 806. Dahero wird eine unreine quadratische Æquation in eine reine verwandelt, so man den andern Terminum heraus wirfft. (s. 790.)

83. Aufgabe.

807. **Aus einem Binomio oder Residuo die Quadrat-Wurtzel zu ziehen.** 83. Aufgabe.

1.) Subtrahire man beyder Theile Quadrata von einander, aus dem Rest extrahire Rad. Quadratam, so allswege Zweyerley, und so wohl † als — ist.

2.) Addire man beyderley Wurtzel zum Rational-Theil, halbire iede Summe, extrahire aus ieder Helffte Rad. Quadr. und setze beyde erstenfalls mit dem Signo †, andernfalls mit dem Signo — zusammen, so giebt solcher Zusammensatz die verlangte Wurtzel aus dem gegebenen Binomio oder Residuo. Als so aus dem Binomio

37 † √ 1200 Rad. Quadr. verlanget wird.

1369 Subtr.

Rest: 169 daraus

√) = 13 und — 13

37 37

Summa: 50 24

2) 25 12 hieraus Rad. Qv.

Fac. 5 † √ 12 Rad. Qv. Binomii.

Desgleichen begehret man die Quadr. Wurtzel aus dem Residuo: 151 — √ 14520

22801 Subtr.

Rest: 8281

Hier-

Hieraus Rad. Qv. $=$ 91 und — 91

addirt 151 151

Summa 242 60

2) 121 30

Fac. 11 — $\sqrt{}$ 30 vor die begehrte Quadrat-Wurzel aus dem gegebenen Residuo.

Beweiß.

Es sey die Radix, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, so ist ihr Quadrat

$= x + y + 2\sqrt{xy}$ (§. 606.) $= x + y + \sqrt{4xy}$ (§. 623.)

Davon $x + y$ den Rational-Theil, und $\sqrt{4xy}$ den surdischen Theil des gegebenen Binomii bedeute.

Um nun aus beyden Theilen wiederum die Quadrat-Wurzel zu bekommen, subtrahire man beyderseits Quadrata von einander, und extrahire Radicem aus der Differentz, nehmlich aus $xx + 2yx + yy - 4xy$, das ist, aus $xx - 2xy + yy$ kömmt Radix $= x - y$ oder $y - x$.

Jede Quadrat-Wurzel addire man zum Rational-Theil, so ist $x + y + x - y = 2x$ und $x + y + y - x = 2y$, davon aus der halben Summe beyderseits Rad. Quadrata extrahiret, die begehrten Wurzeln $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ wieder zum Vorschein bringt.

Anmerck. 808. Wo die Quadrat-Wurzel aus der Differentz surdisch kömmt, da setze man dem gegebenen Binomio oder Residuo nur das Radical-Zeichen vor, und extrahire die Wurzel per Approximationem, z. E. aus dem Residuo $5 - \sqrt{3}$ ist Radix Qv. 1. 8077 &c. (§. 667. 668.)

84. Aufgabe.

85. Aufgabe. 809. Aus einem Binomio oder Residuo, (Apotome) die Cubic-Wurzel zu extrahiren.

Es giebt hier zwey Fälle:

I. Wenn das Quadrat des Rational-Theils gröſſer ist als des surdischen Theils Quadrat.

II. Wenn jenes kleiner ist, als dieses.

1.) Subtrahire man beyder Theile Quadrata von einander, extrahire aus der Differentz die Cubic-Wurtzel, und vermehre sie mit 3, so kömmt ihr Triplum.

2.) Mit einem Divisore aus dem Rational-Theil, (der iedoch kleiner als solches Rational-Theils Radix Cubica seyn muß,) dividire man in gemeldten Rational-Theil, den Quor und voriges Triplum addire man in I, und subtrahire sie im II. Fall, dann muß eine Quadrat-Zahl kommen, deren halbe Wurtzel den erwehlten Divisorem wiederum muß herstellen, und welche auch ein Theil der gesuchten Binomischen oder Apotomischen Wurtzel ist. Dieser halben Wurtzel Quadrat und die anfangs gefundene Cubic-Wurtzel subtrahire man von einander im I, und addire sie im II. Fall, so kömmt auch der andere Theil der verlangten Cubic-Wurtzel, und zwar das Quadrat des surdischen Theils. Z. E. Es sey Rad. Cubica zu extrahiren aus

720 + √ 517888, so ist das Quadrat
des Rational-Theils 518400 Subtr.

Differentz 512 hieraus

Rad. Cub. 8 (3

Triplum Radicis Cub. 24

Nun erwehle man einen Divisorem aus 720, der iedoch kleiner als dessen Radix Cubica ist, und solcher sey 6, dividire damit 720 kommt 120, hierzu addirt man voriges Triplum 24 kömmt 144, so eine Quadrat-Zahl, deren halbe Wurtzel ist 6, als der erste Theil der gesuchten Cubic-Wurtzel. Dieses Theils Quadrat (36) — der anfangs gefundenen Cubic-Wurtzel (8) ist 28, dahero ist die verlangte Cubic-Wurtzel aus 720 + √ 517888 das Binomium 6 + √ 28.

810. Hätte man statt des Binomii sein Residuum genommen, so wäre die gesuchte Cub. Wurtzel 6 - √ 28. Anmerck.

Be-

Beweiß.

Es sey die gesuchte Cubic-Wurtzel $= x + \sqrt{y}$, so ist

$x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y} = 720 + \sqrt{517888}$ (§. 623.)

Davon $x^3 + 3xy = 720$ und $(3x^2 + y)\sqrt{y}$

$= \sqrt{517888}$.

Dieser surdische Theil quadriret, giebt

$9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 517888$

welchen man vom Quadrat des Rational-Theils

$x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 = 518400$ Subtr.

Rest: $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = 512$ hieraus

Rad. Cub. $x^2 - y = 8$ folglich ist

$x^2 = 8 + y$ und $y = x^2 - 8$

Diesen letztgefundenen Valorem substituire man in der Gleichung

$x^3 + 3xy$ kömmt $x^3 + 3x^3 - 24x =$

$4x^3 - 24x - 720 = 0$, dieses nach (§. 804.) mit

$(x-6)$ div. $+24x^2$

$+120x$

$4x^2 + 24x + 120$ geht auf.

Dahero ist $x = 6$, und da oben $y = x^2 - 8$ war,

ist $x + \sqrt{y} = 6 + \sqrt{(36-8)} = 6 + \sqrt{28}$.

Die-

Desgleichen so man aus dem Residuo $40 - \sqrt{1573}$ Radicem Cubicam verlanget, kömmt sie nach obiger Regul $= 2\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}}$. Denn von

1600
1573 Subtr.

Restiren 27 hieraus

Rad. Cub. 3

deren Triplum 9.

Der Divisor von 40 muß kleiner als 4 seyn, nimmt man 2, so stellet die halbe Wurtzel nachgehends mehr als 2 wieder her, derowegen nehme man $2\frac{1}{2}$ dividire damit in 40, kömmt

der Quot 16
hierzu das Tripl. add. 9

giebt das Quadrat 25, dessen Wurtzel 5, und dessen halbe Wurtzel $2\frac{1}{2}$ den Divisorem wieder reciuiret, da nun hievon das Quadrat $\frac{25}{4}$, subtrahire man davon die obige Rad. Cub. 3 oder $\frac{12}{4}$, Restiren $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$, und so ist die verlangte Cubic-Wurtzel aus dem gegebenen Residuo

$$2\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}},$$

Anmerck. 811. Eben also procediret man in dem II. Casu, nur daß an statt des Addirens subtrahiret, und statt des subtrahirens addiret wird, wie in der gegebenen Auflösung allbereit erinnert, und der mit vorigen übereinkommende Beweiß leicht zu erkennen giebt, z. E. Aus dem Binomio von der andern Art:

$$6 + \sqrt{4840} \text{ ist Rad. Cubica } 2 + \sqrt{10}.$$

Anmerck. 812. So auch hier, wie im 808 §. angemercket, die Wurtzeln surdisch fallen, muß man sich mit der Extractione per Approximationem helffen.

Anmerck. 813. Ubrigens sind die vorhergehende 3 Aufgaben von höchster Nothwendigkeit, denn durch die erstere werden die vielerley Fälle der Gleichungen auf wenigere reducirt, und durch die letztern kan man in höhern Gleichungen die surdischen Partes der gefundenen Wurtzeln mit einander in leichtern Zahlen exprimiren.

Vortheil verwandelter Gleichungen. 814. Von der Verwandelung (oder Transformatione) einer Æquation in die andere, da man z. E. vor x die Quantität $y \pm a$, oder $y \pm z$ &c. substituiret, und damit nach der gegebenen Gleichung verfähret, ist im obigen 805 §. allbereit ein nützliches Exempel gegeben worden, nunmehro wird man auch im folgenden sehen, daß sie eines der leichtesten und besten Mittel sey, die Æquationes zu resolviren, worunter des Herrn Varignons Auflösung der Cubischen Gleichung von vielen sehr hoch gehalten wird, * wovon im folgender

85. Aufgabe.

85. Aufgabe. 815. Aus einer Cubischen Æquation die Wurtzel zu ziehen.

* Vid. Memoires de l' Academie R. des Sciences. 1699. p. 191. Ingleichen Mr. de Crouzas Traité de L' Algebre pag. 381. seq.

Sol-

Solche sey $z^3 + pz + q = 0$, nehmlich der andere Terminus sey nach dem 805 §. heraus geworffen. Nun setze man $z = x - y$, so ist

$z^3 = x^3 - 3x^2y + 3xyy - y^3$ (§. 500.) und kommen $-3xy \cdot z$ oder welches gleichviel $-3xy \cdot (x-y)$

$= -3xxy + 3xyy$

Daher ist $z^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - 3xyz - y^3$

Und $z^3 + 3xyz + y^3 - x^3 = 0$ (§. 634.)

$= z^3 + pz + q = 0$

Also kan man sämmtlich vor $3xyz$ die Quantität pz, und vor q, die Quantität $y^3 - x^3$ substituiren, kömmt

$3xyz = pz$, Und $3xy = p$ und $y = \frac{p}{3x}$

Desgleichen $q = \frac{p^3}{27x^3} - x^3$

Folglich ist $qx^3 = \frac{p^3}{27} - x^6$ Dahero ist

$x^6 + qx^3 = \frac{p^3}{27}$ welches eine Quadratische Gleichung

Da $x^6 + qx^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, und daraus

$$x^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}$$ (§. 796.)

Ferner da vorhin $q = y^3 - x^3$, so ist $y^3 = q + x^3$,

und weil $x^3 = -\frac{q}{2} - \left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$ so kömmt

$$y^3 = q - \frac{1}{2}q \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{2}q \dagger \sqrt{\left(\frac{qq}{4} \dagger \frac{p^3}{27}\right)}$$

Nun ist $z = x - y = \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{y^3}$ (§. 591.) das ist

$$z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \dagger \sqrt{\left(\frac{qq}{4} \dagger \frac{p^3}{27}\right)}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} \dagger \sqrt{\left(\frac{qq}{4} \dagger \frac{p^3}{27}\right)}}$$

§16. Diesem nach kommen aus denen 3 Fällen der unreinen Cubic-Gleichung, wenn der andere Terminus daraus geschafft, die Wurtzeln

1) $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}$

Wenn $z^3 \dagger pz - q = 0$ ist

2) $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \dagger \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}} \dagger \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \dagger \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}}$

Wenn $z^3 - pz \dagger q = 0$ ist.

3) $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \dagger \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}} \dagger \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}}$

Wenn nehmlich $z^3 - pz - q = 0$ gewesen ist.

Daher ist die Regul:

1.) Sehe man, unter welchen von denen 3 Fällen die gegebene Æquation gehört, aus selbigem substituire man vor p dem Zehler des andern Termini, und vor q die ledige Zahl der gegebenen Gleichung.

2.) Ver-

2.) Verfahre man mit denen substituirten Zahlen wie es das Symbolum Radicis universale erfordert, observire den ordentlichen Abwechsel der Zeichen, und extrahire aus den Binomiis oder Residuis nach §. 809. die Cubic-Wurtzeln, so müssen dero surdische Theile einander aufheben, wenn eine rationelle Wurtzel heraus kommen soll. Es sey z. E. aus

$x^3 - 9x - 162 = 0$ die Wurtzel zu ziehen,

so gehöret diese Gleichung unter den III. Fall, und ist

$9 = p$ und $162 = q$, dahero $q:2 = 81$.

$qq:4$ oder $(q:2)^2 = 6561$. $p^3:27$ oder $(p:3)^3 = 27$.

Und $(qq:4) - (p^3:27) = 6561 - 27 = 6534$.

Folglich ist $x = \sqrt[3]{(81 + \sqrt{6534})} + \sqrt[3]{(81 - \sqrt{6534})}$

$= 3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6}$ (§. 809.

Deren Summa 6 die Wurtzel aus der obigen Gleichung giebt, und also auch mit andern.

917. Daferne sich die Cubic-Wurtzel aus $(\pm q:2 \pm \sqrt{(qq:4 \pm p^3:27)}$ nicht mit Zahlen lässet ausdrücken, so ist z incommensurabel, und wird im folgenden bald gezeiget werden, wie man ihm durch unendliche Näherung beykommen könne. Anmerck.

86. Aufgabe.

818. Eine Quadrato-Quadratische Gleichung, daraus der andere Terminus weggeworffen, in eine Cubische zu verwandeln. 86. Aufgabe.

Es sey solche $x^4 - qx^2 + rx - s = 0$

Weil eine biquadratische Æquation aus zwey quadratischen erzeuget wird, (s. 799.) so nehme man zwey undeterminirte quadratische Gleichungen, darinnen sich die andern Termini gegen einander aufheben:

$$x^2 - yx + z = 0$$

und $x^2 + yx - b = 0$ multipl.

kömmt: $x^4 + -bx^2 + ybx - bz = 0$

$-y^2x^2 + yzx$

$+zx^2$

Da nun diese der vorigen muß gleich seyn, so ist

$z - y^2 - b = -q \;||\; yz + yb = r \;||$ und $-bz = -s$

folglich ist $z = y^2 + b - q$ und $z + b = r : y$

Oder wenn man vor z seinen vorigen Valorem substituiret, ist

$y^2 + b - q + b = r : y$, das ist

$2b + y^2 - q = r : y$

und $2b = q - y^2 + r : y$

Folglich $b = \frac{q - y^2 + r : y}{2}$ und $-b = \frac{-q + y^2 - r : y}{2}$

Diese ietzt gefundene Gleichung von b substituire man in der ersten Æquation $z = y^2 + b - q$, so kömmt

$$z = y^2 + \frac{q - y^2 + r : y}{2} - q$$

$$x = \frac{2y^2 + q - y^2 + r : y - 2q}{2}$$ das ist

$$x = \frac{y^2 - q + \frac{r}{y}}{2}$$

Nun

Nun setze man vor $-bz$ die gefundenen Geltungen vor $-b$ und z, kömmt

$$-bz = (y^2 - q - \frac{r}{y}) \cdot (y^2 - q + \frac{r}{y}) \text{ dieses multipl.}$$

$$\frac{}{2} \quad \frac{}{2}$$

$$\text{geben } y^4 - 2qy^2 - \frac{r^2}{y^2} + q^2 = -bz = -f$$

$$\frac{}{4} \quad \text{(mit } 4y^2 \text{ multipl.}$$

$$\text{bringt } y^6 - 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 = -4y^2f$$

$$\text{folglich } y^6 - 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 + 4y^2f = 0$$

So nun vor y^2 eine simplere Quantität, z. E. t gesetzet wird, kömmt

$$t^3 - 2qt^2 + q^2t - r^2 + 4ft = 0$$

Welches nunmehro eine Cubische Gleichung.

87. Aufgabe.

819. Aus einer Quadrato-Quadratischen Æquation die Wurtzel zu extrahiren. 87. Aufgabe.

1.) Werffe man nach dem 805. §. den andern Terminum heraus, daferne er darinnen vorhanden.

2.) Verwandele man solche Gleichung in eine Cubische nach voriger Aufgabe, und extrahire daraus die Cubic-Wurtzel nach dem 804 oder 815. §.

3.) Die gefundene Wurtzel substituire man in denen partial-Gleichungen, durch deren Hülffe die Biquadrati-

sche auf die Cubische reducirt worden, so werden sich die zwey ersten underterminirten Quadratischen Gleichungen in Zahlen ausdrücken, und ihre Wurtzeln alsdenn nach dem 796. §. finden lassen.

Es sey die Æquation $x^4 - 55x^2 + 210x - 216 = 0$

so ist $q = -55 \;||\; r = 210 \;||$ und $s = -216$.

So man nun in voriger Cubischen Æquation:

$$t^3 - 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$$
$$+ 4st$$

Die Valores von q, r, s, substituiret, kömmt:

$$t^3 - 110t^2 + 3889t - 44100 = 0$$

Aus 44100 ist die Cubic-Wurtzel beynahe 34, welche aber kein Divisor daraus ist. Derowegen erwehle man die nechst wenigere Divisores 30 und 25, und da der andere Terminus dieser Æquation $= -110t^2$, würde der Abzug zu starck werden, so man 30 nehmen wolte, derowegen dividire man diese Cubische Gleichung mit $t - 25$, so geht alles auf, und ist dahero $t = 25$ (§. 804.) $= y^2$ und folglich $y = 5$

Diese Geltung von y setze man in die Æquation der vorigen Aufgabe, als vor $z = (y^2 - q + r : y) : 2$ kömmt

$z = (25 - 55 + 42) : 2 = 12 : 2 = 6$

Desgleichen vor $-b = (-q + y^2 - r : y) : 2$ kömmt

$-b = (-55 + 25 - 42) : 2 = 72 : 2 = -36$

Demnach werden nunmehro die ersten zwey angenommene Quadratische Gleichungen determinirt, nehmlich vor

$x^2 - yx + z = 0$ kömmt $x^2 - 5x + 6 = 0$, und vor

$x^2 + yx - b = 0$ kömmt $x^2 + 5x - 36 = 0$

Aus der ersten sind die Wurtzeln 2 und 3, und aus der andern sind die Wurtzeln 4 und -9 (§. 796.)

Dero-

Derowegen sind auch solches die Wurtzeln aus obiger Quadrato-Quadratischen Æquation. (§. 336. 802.)

820. In einfachen biquadratischen Gleichungen extrahirt man die Wurtzel nach dem 557. §. oder auch zweymahl die Quadrat-Wurtzel (§. 558.) kömmt die erste Wurtzel nicht genau, so reducire man sie auf eine Rational-Expression, als Anmerk.

$\sqrt[4]{}$ aus 405 ist $=$ 3V5. Denn V405 $=$ V81.5
$=$ 9V5 (§. 604.) und V(9V5) ist $=$ 3V5
(§. 617. 473.)

Aus 17†V288 ist Radix Quadrata 3†V8, aus 3†V8 ist Rad. Quadr. $=$ 1†V2, also ist

$\sqrt[4]{}$ (17†V288) $=$ 1†V2. (§. 807.)

88. Aufgabe.

821. Aus einer vorgegebenen Æquation die Wurtzel nach Vietæ und Ozanams Manier zu extrahiren. 88. Aufgabe.

Dieses geschiehet am füglichsten durch die Transformation, da man vor die unbekannte Grösse x eine zusammen gesetzte $y + z$ erwehlet, und sie nach dem Inhalt der gegebenen Gleichung in eine andere gleiches Inhalts verwandelt, als so

$$x^3 - 20x - 1937 = 0$$

Setze man x sey $=$ $y + z$ und transformire die Æquation in

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 - 20y - 20z = 1 \mid 937$$

Man extrahire auf beyden Seiten den ersten Theil der Cubic-Wurtzel, kömmt

$y = 1$, das ist $y = 10$.

Dann subtrahire man auf einer Seite den Cubum y^3, und auf der andern den Cubum 10^3 oder 1000, bleibt

$$3y^2z + 3yz^2 + z^3 - 20y - 20z = 937.$$

Um z zu bekommen, dividire man mit dem grösten Zehler von z, nehmlich $3y^2 = 300$ in 937, kömmt im Quoto 3, bey nahe $= z$.

So nun die Valores von y und $z = 10$ und 3 in der letzten Gleichung substituirt, und die Zehler der correspondirenden Terminorum damit multiplicirt werden, wird

$+3y^2z$	$=$	$+900$
$+3yz^2$	$=$	$+270$
$+z^3$,	$=$	$+27$
$-20y$	$=$	-200
$-20z$	$=$	-60
Summa		937 von 937 geht auf.

Folglich ist x, nehmlich die Wurtzel der erstgegebenen Gleichung $= 10 + 3 = 13$. (§. 792.)

Gleichergestalt sey aus einer biquadratischen Gleichung

$$x^4 + 256x^2 + 512x = 132|7104$$

die Wurtzel zu ziehen, und gesetzt x sey $= y + z$

so kömmt die transformirte Æquation:

$$y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 + 256y^2 + 512yz + 256z^2 + 512y + 512z = 1327104.$$

Nun extrahire man auf beyden Seiten den ersten Theil der Quadrato-Quadrat-Wurtzel, nehmlich man distinguire die ledige Zahl von 4 zu 4 Ziffern in Classen, kommen zwey Classen: 132|7104, aus deren erster, nehmlich 132, oder vielmehr 132|0000, die Quadrato-Quadrat-Wurtzel bey nahe $= 3$ oder 30, und also $y = 30$ (§. 475.) Diesen gefundenen Valorem

von

von y, substituire man in der letzten Æquation, wo y alleine steht, kömmt

$$y^4 = 810000$$
$$156y^2 = 230400$$
$$512y = 15360 \text{ folglich}$$

$$y^4 + 256y^2 + 512y = 1055760.$$

Dieses subtrahire man beyderseits aus sothaner Gleichung, bleiben

$$4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 + 512yz + 256z^2 + 512z = 271344.$$

Damit man nun auch z bekomme, dividire man mit $4y^3$, (nehmlich mit dem grösten Zehler von z) so = 108000 in die ledige Zahl 271344, kömmt $z = 2$

Dahero
$$4y^3z = 216000$$
$$6y^2z^2 = 21600$$
$$4yz^3 = 960$$
$$z4 = 16$$
$$512yz = 30720$$
$$256z^2 = 1024$$
$$512z = 1024$$

Thut in allen 271344 diese
von 271344 subtrahirt

Restiret 0

Dahero ist die gesuchte Wurtzel Rationell, und gilt x just $30 + 2$ oder 32, weil hierinne $x = y + z$.

822. Hätte nach geschehener Operation etwas restiret, und man wolte die Wurtzel genauer haben, so multiplicire man sie in solcher Æquation mit 10, 100, oder mit so viel Zehnern als man will, als so z. E. die Æquation Anmerck.

tion vier Dimensionen hätte, setze man zur ledigen Zahl noch so viel mahl vier Nullen, als man will Ziffern mehr haben über diejenigen, so zu der Wurtzel allbereit gefunden, alsdenn sind die anzusetzenden in der Wurtzel der Zehler eines Bruchs, dessen Renner nach der Unität so viel Nullen hat, als der Zehler Ziffern, das ist, es sind Decimal-Theile. (§. 667.)

Anmerck. 823. Wenn der Zehler des andern Termini sehr groß ist, oder wenn auch die gröste Potentz das Signum - vor sich hat, als so:

$$-x^4 + 262144x = 5959680$$

allwo die transformirte Gleichung $-y^4 - 4y^3z - 6y^2z^2$

$$- 4yz^3 - z^4 + 262144y + 262144z = 5959680$$

kan man so gleich die ledige Zahl mit dem Zehler von y dividiren, kömmt $y = 22$, und restiret nach beyderseitigen Abzug

$$-y^4 - 4y^3z - 6y^2z^2 - 4yz^3 - z^4 + 262144z = 192512,$$

hierzu addire man $y^4 = 234256$, kömmt

$$-4y^3z - 6y^2z^2 - 4yz^3 - z^4 + 262144z = 426768$$

In dieser letzten Æquation dividire man ferner mit dem Zehler von z, nehmlich mit 262144 in 426768, kömmt $z = 2$. (Denn ob wohl eigentlich im Quoto nur 1 kömmt, so wäre es doch zu wenig, wegen der vielen Additionum, so wegen des Signi - geschehen müssen.) Substituiret man nun die gefundene Valores von y und z, in der letzten Æquation, so hebt sie sich damit auf, und ist daher x, so $= y + z = 22 + 2 = 24$. (§. 792.) *

*) Vid. Ozanam Nouveaux Elemens d' Algebre. Lib. II. pag. 266. seq.

89. Aufgabe.

824. **Die Wurtzel aus einer Æquation nach des Herrn Newtons Methode durch unendliche Gleichungen und Näherungen zu finden.** 89. Aufgabe.

Ist die Wurtzel rational, so beträget nach wenigen Extractionen die Summe der Decimal-Brüche, (die man zu denen allbereit genommenen und gefundenen Gantzen allemahl noch addiren muß,) fast gar nichts, und ist dahero bald zu mercken, daß eine Rational-Wurtzel darinnen enthalten, vornehmlich so die Gantzen die ledige Zahl aufheben.

Ist die Wurtzel irrational, so kommet sie um so viel genauer, als man viel neue Gleichungen continuiret, und da die Bruchs-Potentzen nichts merckliches ausmachen, kan man sie ohne sonderlichen Fehler hinweg lassen, die Extractiones ersparen, und bloß dividendo æquiren. Wolte man aber ja noch die Quadratische unreine Gleichung behalten, dann kömmt die Radix so wohl geschwinder, als auch näher.

Der Beweiß liegt in der Operation selbsten, und ist diese in vorhergehenden Transformationen schon zum Theil zu ersehen, als es sey die Wurtzel zu suchen aus einer Cubischen Gleichung, da

$x^3 - 20x - 1937 = 0$ So die Wurtzel

$+10,000$ hierzu

$+4,$

add. $-0,928$

$-0,073$

Summa: $+13,001$

Es

Es sey		
$10+p = x$	$+x^3 =$	$+1000+300p+30p^2+p^3$
so ist	$-20x$	$-200-20p$
	-1937	-1937
	Summa	$-1137+280p+30p^2+p^3 = 0$
$4+q = p$	$+p^3 =$	$+64+48q+12q^2+q^3$
	$+30p^2$	$+480+240q+30q^2$
	$+280p$	$+1120+280q$
	-1137	-1137
$-0.928+r = q$	Summa	$+527+568q+429q^2 \ldots$
	$429q^2 =$	$+36.169728-77.952r+42r^2$
	$568q$	$-527.104+568 \ldots r$
	$+527$	$+527$
$-0.073+s = r$	Summa	$36.065728+490.048r+42r^2$

13.001 vor die Wurtzel, beynahe.

Nehmlich man setzet nach Belieben $10+p = x$, und transformiret hiernach die gegebene Gleichung, lässet in der transformirten Addition die höhern Potentzen hinweg, kömmt in der ersten Summa: $280p = 1137$, folglich $p = 4$. Vor den Uber-Rest rechnet man q, und setzet vom neuen $4+q = p$, transformiret hiernach die letzte Gleichung, kömmt in der andern Summa $568q = -527$, folglich $q = -0.928$ (§. 657.) Weiter setzet man $0.928+r = q$ Transformiret daraus die vorhergehende Gleichung, kömmt in der dritten Summa $490.048r = -36.065728$ folglich $r = -0.073$. Addiret man nun die 3 letzten Valores zusammen, kömmt $x = 13.001$ bey nahe. Da aber 13 die ledige Zahl 1937 aufhebt, ist die Wurtzel aus der gegebenen Æquation $= 13$.

825. Will man aus der ersten Summa die unreine quadratische Æquation mit beybehalten, so sind

$$30p^2 + 280 = 1137$$

$$p^2 + \frac{28}{3}p = 38 \text{ beynahe} = \frac{114}{3} = \frac{342}{9} \text{ (§. 637.)}$$

$$\text{folglich } p^2 + \frac{28}{3}p + \frac{196}{9} = \frac{342}{9} + \frac{196}{9}$$

$$\text{Und } p + \frac{14}{3} = \sqrt{\frac{538}{9}} = \frac{23}{3} \text{ beynahe}$$

$$\text{Dahero } p = \frac{23-14}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ (§. 796.)}$$

$$\text{Und } 10 + p = x = 13.$$

Auf gleiche Weise sey aus folgender Æquation die Wurzel zu extrahiren, welche irrational fallen wird,

$$\text{Z. E. } x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$$

Hieraus sey $5 + p = x$ so ist

	x^3	$+125 + 75p + 15p^2 + p^3$
	$2x^2$	$+50 + 20p + 2p^2$
	$-23x$	$-115 - 23p$
	-70	-70
	Summa	$-10 + 72p + 17p^2 + p^3 = 0$
$+0.13 + q = p$	p^3	$+0.002197 + 0.05079\,x.$
	$17p^2$	$+0.2872 \quad +4.42 \quad q$
	$72p$	$+0.36 \quad +72. \quad q$
	-10	-10
$+0.0046 + r = q$	Summa	$-.350503 + 76.47079\ldots = 0$

5.1346 Nehmlich es kommen $76.47079 = .350503$

Folglich

Folglich $q = .350503$ welches auf

76.470700

Decimal-Theile, z. E. 10000 reducirt, giebt 0.0046 beynahe. (§. 367. 657.)

Demnach ist die Wurtzel beynahe $= 5.1346$.

und so weiter. *

90. Aufgabe.

90. Aufgabe. §26. Nach des Herrn Halley Manier die Wurtzel durch Näherung zu finden, die Æquationes seyn von so viel Dimensionen als sie wollen.

Als es sey auf diese Art aus voriger Gleichung die Wurtzel zu ziehen, da

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$$

Man setze $5 + y = x$ so ist

$x^3 = 125 + 75y + 15y^2 ..$
$+2x^2 = 50 + 20y + 2y^2$
$-2x3 = -115 - 23y$
$-70 = -70$

Summa $= 10 + 72y + 17y^2 ...$

folglich $72y = 10$ und $y = 0.1$

Nun nehme man vom neuen $5.1 + y = x$, so ist

$x^3 = 132.651 + 78.030y$ x.
$+2x^2 = 52.02 + 20.4$
$-23x = -117.3 - 23.$
$-70 = -70.$

Summa $= 2\,629 + 75.430y = 0$

* Mehr davon, wie auch von der Resolutione literali Æquationum, kan in des Herrn Newtons Philos. Natur. Pr. Math. am Ende de Analysi per Quantitatum Series p. 8. f. nachgesehen werden.

folglich

folglich $75.430y = 2.629$,
kommt $y = 0.0348$, Und ist daher
$x = 5.1348$ bey nahe. u. s. w.

Nimmt man so gleich die erste Summa mit der Quadratischen Gleichung, kömmt

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$17)\ y^2 + \frac{72y}{17} = \frac{10}{17}$$

$$y + \frac{36}{17} = \sqrt{\left(\frac{36}{17}\right)^2 + \frac{10}{17}}$$

$$= \sqrt{\frac{1466000000}{289000000}} = \frac{38288}{17000} \text{ folglich ist}$$

$$y = \frac{38288}{17000} - \frac{36000}{17000} = \frac{2288}{17000} = \frac{1346}{10000} \text{ beynahe.}$$

Wolte man nun ferner mit $5.1346 + y = x$ die gegebene Gleichung von neuen transformiren, so würde man viel genauer zur gesuchten Wurtzel gelangen, u. s. w.

827. Der Beweiß erhellet aus der Operation selbs; Anmerck. sten, und hat ihn der Herr Hof-Rath Wolff auch überhaupt vermittelst einer undeterminirten Æquation gegeben. *

828. Dieweil in allen Aufgaben, wo die unbekannte Anmerck. Quantität x etliche mahl in sich selbst muß multiplicirt werden, die Æquationes so gleich auf mehrere Dimensiones x^2, x^3, &c. hinauf steigen, so lässet es sich leicht erachten, daß vorgehende Extractiones Radicum in solchen

* Vid. Herrn Hof-Rath Wolfii Elem. Math. Univ. pag. 360.

Fällen gar nicht zu entrathen seyn, davon Kürtze halber nur etliche wenige Exempel noch will beybringen.

1.) Etliche Litigantes verlieren einen Proceſs von 234 Thl. hätten die übrigen viere auch causam communem mitgemacht, so wäre es einem 8 Thl. weniger gekommen. Wie viel haben demnach litigiret, und was hat es iedem gekostet?

Gesetzt es wäre im ersten Fall der Numerus litigantium $= x$, so wäre er im andern Fall $x + 4$

x verlieren 234 was 1? Fac. $\frac{234}{x}$ Thl.

$x + 4$ verlieren 234 was 1? Fac. $\frac{234}{x+4}$

Folglich ist $\frac{234}{x} - \frac{234}{x+4} = 8$ oder

$\frac{234x+936-234x}{xx+4x} = \frac{936}{xx+4x}$ (§. 370.) $= 8$.

Dahero $8xx + 32x = 936$. (§. 635. 371. d. 8)

Und $xx + 4x - 117 = 0$, woraus

$x = -2 + \sqrt{4 + 117}$

$x = -2 + \sqrt{121}$

$x = 11 - 2 = 9$. (§. 796.)

Demnach sind 9 Litigantes gewesen, und weil 234 : 9 $= 26$, hat es einem 26 Thl. gekostet, hätten aber alle 13 mit gehalten, wäre es einem nur 18. und also 8 Thl. weniger gekommen.

2.) Ein

2.) Ein Herr profitiret aus seiner Fabrique von iedem Arbeiter jährlich so viel Rthl. und noch 3 drüber, als er Arbeiter hat, und durch gute Obsicht stehet solche Fabrique allbereit so viel Jahre, als er von iedweden jährlich Rthl. profitiret. Da sich nun der sämmtliche seitherige Gewinst davon, auf 6800 Rthl. beläufft, möchte iemand gerne wissen, wie viel er Arbeiter, und wie viel Jahre er die Fabrique gehabt?

Gesetzt, der Arbeiter seyn gewesen x
Von iedem hat er gewonnen $= = x + 3$ Thl.

Facit jährlich $x^2 + 3x$ Thl.
Dieses mit $= = = x + 3$ Jahren mult.

giebt $x^3 + 6x^2 + 9x = 6800$
Das ist:
$x^3 + 6x^2 + 9x - 6800 = 0$

$x-17)$ $+23x^2 +400x$

$x^2 + 23x + 400$ Dahero $x = 17$.

Die Cubic-Wurtzel aus der ledigen Zahl ist zwar 19; so aber wegen der Signorum + zuviel, 18 ist kein Divisor aus 6800. Derowegen hat man diese Æquation mit $x - 17$ dividiret, und da alles aufgehet, ist $x = 17$. (§. 804.)

Also hat er 17 Arbeiter gehabt, von jedem jährlich 20 Thl. profitiret, thut jährlich 340 Thl. und dieses 20 Jahr lang, Facit 6800 Thl.

Auf gleiche Weise können sich unzehliche Fälle ereignen, darinnen die Ausziehungen der höhern Wurtzeln ihren Nutzen zeigen, weswegen sie demnach nicht (wie etliche meynen) unter die unnöthigen Extractiones zu rechnen stehen.

Vom Gebrauch der Rechnung in Facultäten und Disciplinen.

In der heiligen Schrifft Erklär.

829. Nachdem wir nicht wenig Schrifft-Stellen finden, darinnen so wohl die Patres, als auch die neuern Ausleger derselben Mystischen Verstand in Zahlen untersuchet und erkläret, auch da man in der Chronologia Sacra nicht allein die Zahlen der Menschen und Jahre, sondern (welches weit mehr ist,) eine sehr grosse Anzahl solcherley Zahlen gegen einander rechnen und vergleichen muß, so siehet man schon, daß der Heiligen Schrifft Beflieſſene nicht weniger hierinne einer hülflichen arithmetischen Hand bedürffen. * Wie denn niemand so leicht die Einwürffe, so wieder die Anzahl der lebenden Menschen und aufbehaltenen Thiere zur Zeit der Sündfluth, wieder die Vermehrung des Israelitischen Volcks in Egypten, wieder die Zahl der zurückgekommenen aus der Babylonischen Gefängniß, und dergleichen, wird gründlich einsehen, und genau wiederlegen können, wenn er der dazu gehörigen Rechnung noch unerfahren ist. **

In der Theolog. Naturali.

830. Ferner gehet so wohl der gemeine, als algebraische Calculus in der natürlichen Theologie nicht gantz ohne Nutzen ab, wie etwa in der Dissertation, *** da die Notio Intellectus Divini durch die Wercke der Natur illustriret, und dessen unauszudruckende Krafft indessen nur in etwas mit fast undencklich grossen Zahlen abgeschattet wird. Oder wenn wir nach des Herrn Ray Berechnung **** nur 200 Geschlechte der vier füßigen Thiere,

* Vid. B. Hambergeri Dissert. de Usu Matheseos in Theologia.

** Scheuchzeri Prælect. de Mathmat. Usu in Theologia, Item Reyheri Mathesis Mosaica, und Herrn D. Mellii Antiqv. Sac. in fine.

*** In Specimine Physices ad Theolog. Natur. applicatæ, so unter dem Herrn Hof-Rath Wolff Herr Weißmüller gehalten.

**** Ray Wisdom of God, manifested in the Works of Creation.

667 Arten der Vögel, 1200 Sorten der Fische, und 20000 verschiedene Insecten setzen, von allen Geschlechten aber nicht etwa ein, sondern gar viele Tausend auf dem gantzen Erdboden erhalten werden, so muß man noch mehr die erstaunend grosse Oeconomie des Höchsten preisen, der solche alle so viel Jahre versorget, da die grösten und reichsten Regenten, manche Thiere nur von einem eintzigen Geschlecht alle zu erhalten, nicht würden vermögend seyn. *

Im übrigen hat der Herr Graf Bonde unterm Præsidio des Herrn Prof. Creilings die Æstimationem Status Piorum & Impiorum per Legem Isodynamicam algebrace untersuchet, und also auch aus der natürlichen Erkänntniß inferiret, daß die Condition der ersten unendlich besser sey, als die Condition der andern. ** Und da der Herr Craig in seinem Werckgen de Probabilitatibus & veris Voluptatum Valoribus angemercket, daß die Conatus Sapientum in ratione directa, & insipientum in ratione inversa, quam habent veri Expectationum suarum valores, der verus valor aber $=$ sey der Summæ der erwarteten Dinge dividirt mit der Summa Probabilitatum, so deduciret er aus dieser Universal-Expression, daß der Valor der Erwartung von der verheissenen unvergänglichen Glückseeligkeit unendlich grösser als der zeitlichen, und daß diejenigen am weißlichsten handeln, die unendlich mehr Mühe jene, als diese zu erhalten, anwenden.

§ 13. Im Fall auch dergleichen Dinge bißweilen zu wiederlegen seyn, so kan es von demjenigen, der solches Calculi allbereit kundig, weit ausnehmender geschehen, Anmerck.

* Hamberg. Loc. Cit. §. XIX.

** Vid. Ej. Dissert. Academ. de Statera Universali, qva Legem Isodynamicam in Natura observatam ad Phœnomena cuncta, etiam Optica, æque ac Moralia, cumprimis Jus Naturæ, aliaque in universum extendi, breviter ostenditur. Tubingæ. 1703.

als von einem, der noch nicht untersuchet hat, wie weit derselbe nach seiner Natur etwa möchte zureichen.

In der Jurispr. 832. In der Jurisprudenz, da in vielen Stücken das mehreste aufs meum und tuum ankömmt, ist die Nothwendigkeit derer Ausrechnungen besser bekannt, als ich etwa melden möchte. Jedoch will von unzehligen Nutzungen des Calculi indessen nur etliche wenige Exempel mitbeybringen, die nehmlich etwas mehrerer Ausarbeitung, als gemeine Proportions-Aufgaben benöthiget seyn, darunter die Rechtliche Rabatt- und Intereſſe-Rechnung, die Testamenis-Quotæ pro quarta Falcidia und verschiedene andere in Erbschafften vorkommende Theilungen gehören dürfften.

α.) Von der Rechtlichen Rabatt- oder Anticipations-Rechnung, wie sie der Herr von Leibnitz calculiret, * und seithero in Observanz ist.

Erklär. 833. Sie lehret, wie viel derjenige soll weniger geben, der nach einiger Zeit, oder nach einigen Jahren erst zu zahlen schuldig ist, wobey voraus gesetzet wird:

1. Satz. 834. Derjenige, so Geld vor einer gesetzten Zeit bezahlet, kan mit Recht das Intereſſe zwischen ietzo und der gesetzten Zeit prætendiren.

2. Satz. 835. Eine Abrechnung ist so viel, als eine Auszahlung, oder wie die JCti reden: Compensatio est quædam Solutio.

3. Satz. 836. Es kan der Creditor und Debitor contrahiren und einig werden, daß ihr gantz negotium vor ietzo auf einmahl und ohne eines von beyden geringsten Schaden soll abgethan werden.

* Vide Acta Eruditorum Lipsiensia Anno 1683. Mens. Oct. pag. 425.

837. Hier-

837. Hieraus und im folgenden wird deduciret, wenn man z. E. 5 pro Cento rechnet, daß ietzo eine Unität, so über das Jahr erst wäre gefällig, oder zu zahlen gewesen, nicht mehr giebt, als

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \text{\&c.}$$
$$1 \quad 20 \quad 400 \quad 8000 \quad 160000 \quad 3200000$$

also unendlich fort.

Oder überhaupt, wenn b statt 20 eine andere Quotam usurariam bedeutet:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \text{\&c. in infinitum.}$$
$$1 \quad b \quad bb \quad b^3 \quad b^4 \quad b^5$$

Beweiß und Erläuterung.

Du sollst mir zu Ausgang dieses Jahres 1. Z. E. 1. Hundert, 1. Tausend ꝛc.) bezahlen. Da du mir aber solches ietzo, nehmlich 1 Jahr voraus bezahlest, so bin ich dir deswegen schuldig $\frac{1}{20}$. (nach dem 1. Satz. §. 834.) Weil wir aber unsere Sachen wollen völlig abthun, (nach dem 3. Satz, §. 836.) so forderst du hingegen, daß ich dir das $\frac{1}{20}$ ietzo soll voraus bezahlen. Nun aber ist eine Abrechnung so viel als eine Auszahlung (nach dem 2. Satz. §. 835.) Derowegen kan ich das $\frac{1}{20}$, so ich dir geben soll, von meiner Summa lassen abziehen, und demnach bekomme ich 1 weniger $\frac{1}{20}$, oder $1 - \frac{1}{20}$. Aber weil du dieses $\frac{1}{20}$, so übers Jahr erst wäre gefällig gewesen, ietzo voraus empfängest, so kan ich wieder das gehörige

hörige Interesse, nehmlich $\frac{1}{20}$ von diesem $\frac{1}{20}$ fodern, das ist $\frac{1}{400}$ (nach dem 1. Satz.) Und da unsere Sache ietzo völlig soll ausgemacht werden, so must du mir geben $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$. Aber da du mir dieses $\frac{1}{400}$, so ich übers Jahr erst hätte bekommen sollen, ietzo gleich giebest, so must du auch davor wieder $\frac{1}{20}$ von $\frac{1}{400}$, das ist $\frac{1}{8000}$ decourtiren. Dahero bekomme ich $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$ &c. Nehmlich so immerfort, also daß die Termini Progressionem geometricam subvigecuplam ausmachen, worinnen die Signa Plus und Minus alterniren.

Nun muß man untersuchen, wie viel die unendliche Reihe folgender abnehmenden Progression.

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{6^5} \text{ &c.}$$

zusammen austrage?

Nehmlich ihre gantze Summa ist $\frac{6}{6+1}$, das ist,

wenn $6 = 20$, ist zu beweisen, daß $\frac{20}{21}$ eben so viel,

als die unendliche Reihe:

$$1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} \text{ &c. &c.}$$

Denn

Denn man multiplicire so wohl $\frac{20}{21}$ mit 21. (kömt 20.) (§. 371. d.) als auch diese Progression mit 21, oder welches gleich viel mit 20 + 1, kömmt auch 20, nehmlich

$$1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} \text{ &c.}$$

$$\text{Fac. } 20 - 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} \text{ &c.}$$

$$\text{Hierzu } + 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} \text{ &c. (+ 1}$$

Summa 20

Da nun $\frac{20}{21}$ und die Progression $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$ &c. beyde mit 21 multiplicirt, einerley Facta heraus bringen, so ist $\frac{20}{21} = 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$ &c. (§. 265.) welches zu beweisen war. Und also ist die Geltung der ietzigen Unität, so erst über ein Jahr sollen bezahlt werden

$$\frac{6}{6+1} = \frac{20}{21} = \frac{100}{105}$$

Nehmlich à 5 pro Cent gerechnet.

So man aber 6 pro Cent rechnen wolte, bekäme ich $\frac{100}{106}$ vor eine Unität, nehmlich da $100:6 = 16\frac{2}{3}$, wäre

$\frac{1}{6}$	=	$16\frac{2}{3}$	=	50	=	100	u. s. w.
$\frac{1}{6}+1$		$17\frac{2}{3}$		53		106	

838. Hierauf sehe man, wie hoch der Valor von einer Unität komme, wenn auf 2, 3, 4 und mehr Jahre soll anticipirt werden.

Der Valor der übers Jahr erst gefälligen Unität ist $\frac{20}{21}$ ietzo —, (nach vorhergehenden,) derowegen so du mir über 2 Jahr erst eine Unität zahlen solst, ist es so viel, als wenn du mir (nach dieser Rechnung) erst übers Jahr $\frac{20}{21}$ — schuldig wärest. Ferner so du mir übers Jahr erst $\frac{20}{21}$ — schuldig, so ist es eben nach vorigem, als solte ich ietzo $\frac{20}{21}$ — von dieser Summe, oder $\frac{20}{21}$ — von $\frac{400}{441}$ — das ist $\frac{20}{21}$ — von dir bekommen. Derohalben so du mir nach 2 Jahren etwas schuldig bist, ist der ietzige Valor von solcher Schuld $\frac{400}{441}$ — oder das Quadrat von $\frac{20}{21}$ —, nehmlich derselben Summe, als einer Unität. Auf gleiche Weise siehet man, daß der ietzige Valor einer nach 3 Jahren erst gefälligen Unität $= \frac{20}{21}$ — von $\frac{20}{21}$ — von $\frac{20}{21}$ —, oder der Cubus von $\frac{20}{21}$ — das ist $\frac{8000}{9261}$ — und so weiter. (§. 246.)

Woraus dann wahrzunehmen, daß so wohl die Zehler als Renner der nach gewissen Jahren zu anticipirenden Theile nach der Ordnung derer Potentzen immer weiter und weiter hinauf steigen, woraus auch folgende Tabelle, so in Act. Erudit. l. c. zu finden, kan calculirt werden.

Z. E.

Z. E. Wenn auf 3 Jahr ein Capital à 100000 Thl. soll anticipirt werden, inferiret man nach der Regul de Tri:

$$1 \text{ Unität anticipirt (auf 3 Jahr)} \frac{8000}{9261} \text{ was } 100000?$$

Fac. 86384 Thl. beynahe.

§39. Tabelle der zu anticipirenden Posten von einem Capital z. E. auf 100000 gerechnet.

Jahre	Posten	Jahre	Posten
1	.95238	21	.35894
2	.90703	22	.34185
3	.86384	23	.32557
4	.82270	24	.31007
5	.78353	25	.29530
6	.74622	26	.28124
7	.71068	27	.26785
8	.67684	28	.25509
9	.64461	29	.24294
10	.61391	30	.23138
11	.58468	31	.22036
12	.55684	32	.20987
13	.53032	33	.19987
14	.50507	34	.19035
15	.48102	35	.18129
16	.45811	36	.17265
17	.43630	37	.16444
18	.41552	38	.15661
19	.39573	39	.14915
20	.87689	40	.14205

§40. Wolte man das Capital auf 10000000 setzen, würden die Posten noch schärffer kommen, und kan man auch aus der vorhergehenden immerfort auf die folgende Anmerck.

de schliessen, wenn man der Kürtze halber nach §. 719. verfähret.

21 giebt 20 was 10000000?
Fac. 9523810 vor 1 Jahr

21 —„ 20 was 9523810?
Fac. 9070295 vor 2 Jahr. u. s. w.

91. Aufgabe.

91. Aufgabe.

841. Zu determiniren, wie viel man von einem in etlichen Jahren erst gefälligen Capital muß iezo nehmen, da man es voraus haben will.

1.) Suche man die dabey gemeldeten Jahre in der Tabelle, und ersehe die ihnen gegen überstehende Post.

2.) Setze man nach der Regul de Tri:

100000 giebt die ersehene gegen überstehende Post,
was giebt mein in so vielen Jahren gefälliges Capital?

Z. E. Cajus soll von Titio erst in 6 Jahren 8400 Thl. gezahlt bekommen, Cajus aber findet iezo eine gute Gelegenheit sein Geld zu employren, auch will ihm Titius desfalls gerne helffen, fragt sichs, wie viel Cajus vor iezo bekommt? (5 pro Cento gerechnet.)

I
Facit. 6268 — Thl. bey nahe.

4
100000 — „ 74622 — „ 8400
„ „

298488 (84
596976

6268|248 | Facit 6268 Thl.
5|952 | 5 Gr.
11|424 | 11 Pf.

842. Es

842. Es ist leicht zu erachten und der Billigkeit gemäß, daß Cajus solche 6268 Thl. ꝛc. in 6 Jahren à 5 pro Cent wieder müsse auf 8400 Thl. nutzen können, wenn man nehmlich inferiret: Zusatz.

20 — „ 21 — „ 6268 ? oder welches auch gar bequem:

$$100 — „ 105 — „ 6268\tfrac{1}{4} — ? \text{ Fac. } 6581\tfrac{2}{3} —.$$

$$100 — „ 105 — „ 6581\tfrac{2}{3} — ? \text{ Fac. } 6910\tfrac{3}{4} —$$

$$100 — „ 105 — „ 6910\tfrac{3}{4} — ? \text{ Fac. } 7256\tfrac{1}{5} —$$

$$100 — „ 105 — „ 7256\tfrac{1}{5} — ? \text{ Fac. } 7619$$

$$100 — „ 105 — „ 7619\tfrac{5}{6} ? \text{ Fac. } 8000$$

$$100 — „ 105 — „ 8000 ? \text{ Fac. } 8400.$$

843. Dahero, so man den ersten Ansatz aus obiger Aufgabe umkehret, kan man auch dadurch den so genannten Anatocismum, oder Zinß auf Zinß haben, (§. 732. I.) davon denn folgende Zusatz.

92. Aufgabe.

844. **Zu erfahren, wie hoch man ein gewisses Capital in so und so viel Jahren nutzen könne, wenn man die jährlichen Zinsen so gleich wieder ausleihet.** 92. Aufgabe,

845. Man suche aus obiger Tabelle (§. 839.) die zu solchen Jahren gegen überstehende Post, setze sie forne an, dann 100 000 in die Mitte, und das gegebene Capital zuletzt, suche hiernach die vierdte Proportional-Zahl (§. 710.) so giebt sie solch Capital mit seiner völligen Nutzung.

Z. E.

Z. E. Einer hat geerbt 9600 Thl. will solch Geld à 5 pro Cent auslehnen, und die jährlichen Interessen allezeit wieder zu Capital machen, fragt sichs, wie hoch er solche 9600 Thl. in 10 Jahren bringen werde? Man setze:

61391 geben 100000 was geben 9600?

28933
Fac. 15637 ——— Thl.
61391

93. Aufgabe.

93. Aufgabe.

846. Zu finden, wer unter zweyen am meisten licitiret, und wieviel des einen Geboth das andere übersteiget.

1.) Rechne man beyderley Nutzungen auf einerley Zeit, nach vorhergehender Aufgabe.

2.) Subtrahire beyderley gefundene Summen von einander, so zeiget der Rest welcher, und wie viel derselbe mehr giebt.

Z. E. Ein gewisses Guth wird subhastiret, A bietet 30000 Meißn. fl. nehmlich 20000 fl. baar, und 10000 fl. mit 2000 fl. auf Tag-Zeiten in 5 Jahren zu bezahlen. B bietet 28000 fl. nehmlich 26000 fl. baar, und 2000 fl. auf Tag-Zeiten jährlich mit 500 fl. in 4 Jahren zu entrichten. Wessen Gebot ist demnach das meiste?

Man inferire nach obiger Tabelle (§. 839.)

I
78353-„ 100000-„ 20000? Fac. 25525 — fl. beynahe.
2
82270-„ 100000-„ 2000? Fac. 2431.—„4
86384 ——— „ ——— „ Fac. 2315:5:2
90703 ——— „ ——— „ Fac. 2205: - -
95238 ——— „ ——— „ Fac. 2100 - -
Hierzu 2000

Gantze Nutzung von A ——— 36576:16 -

Fer-

Ferner setze man vor B

78353-„	109000-„	26000?	Fac. 33183:3.3
82270-„	100000-„	500?	Fac. 607:15.9
86384	——— „	——— „	Fac. 578.17-
90703	——— „	——— „	Fac. 551. 5.3
95238	——— „	——— „	Fac. 525 - -

völlige Nutzung von B = 35445:20:3
Diese subtrahire von des A Nutzung 36576:16-

Differ. 1130:16:9

Nehmlich um so viel ist des A Geboth besser.

547. Man hat hier die Pfennige und derselben Brüche nicht so gantz genau mit genommen, daferne aber die Differentz sehr klein fällt, dann ist es nöthig sie desto schärffer mit anzusetzen. Anmerck.

548. Weil 20:21 = 100:105, so kan man vor alle Potentzen der ersten Ration auch alle Potentzen der andern Ration substituiren, (§. 732. XII.) wordurch die Division erspahret, und der Calculus um ein ziemliches erleichtert wird, dahero kommen die Rationes, Anmerck.

vor I Jahr: 100

105

vor II Jahr: 10000

11025

vor III Jahr: 1000000

1157625

vor

vor IV Jahr: 100000000

121550625

vor V. Jahr: 10000000000

12762815625

vor VI. Jahr: 1000000000000

1340095640625

vor VII. Jahr: 100000000000000

140710042265625

vor VIII. Jahr: 10000000000000000

14774554437890625

vor IX. Jahr: 1000000000000000000

15513282159785156 25

vor X. Jahr: 100000000000000000000

162889462677744140625

(§. 473.) und so weiter.

Nimmt man diese Zahlen gantz, so kommen auch die kleinsten Theile der Nutzungen gantz genau, iedoch ist es meist hinlänglich, wenn die Ansätze nur auf 100000 eingerichtet werden. Als voriges Exempel (der 91 Aufgabe s. 846.) kan auch also berechnet werden:

100000

100000 -„ 127628 -„ 20000? F. 25525 ½ fl. beynahe.
100000 „ 121551 -„ 2000? F. 2431 - 5
100000 „ 115762 -„ 2000? F. 2315. 5 -
10000 „ 11025 -„ 2000? F. 2205 - -
100 - „ 105 „ 2000? F. 2100 - -
Hierzu 2000 - -

kömmt von A: 36576: 16 -„

Ferner inferire man:

100000 -„ 127628 -„ 26000? F. 33183:5:10
100000 -„ 121551 -„ 500? F. 607:15.9
100000 -„ 115762 -„ 500? F. 578:17 -
10000 -„ 11025 -„ 500? F. 551. 5.3
100 - „ 105 -„ 500? F. 525 - -

kömmt vor B: 35446: 1: 10

Nehmlich beynahe fast alles wie vorhin, und auf gleiche Weise werden auch mehrere Licita berechnet.

β.) Vom Modo computandi Quartam Falcidiam.

549. Wenn ein oder mehr Erben mit Legatis zuweilen also beschwehret werden, daß die Erbschafft davon um mehr als ¾ erschöpffet wird, so müssen die Legata nach proportion so viel gemindert werden, daß dennoch die Erben den 4ten Theil (oder Quartam Falcidiam) der Erbschafft bekommen oder frey behalten. * Anmerck.

Derohalben ist die Regul zu dieser Berechnung aus der 75. Aufgabe herzuholen, wenn der Legatorum viel seyn, und kömmt vornehmlich darauf an:

* L. 73. §. 5. D. & L. 2. C. h. t.

94. Aufgabe.

94. Aufgabe.

550. **Wenn die Legata Dodrantem Heredi-tatis übertreffen, selbige anders zu proportioniren, daß die Erben ihren vierdten Antheil frey behalten.**

1.) Erfinde man, was die gantze Erbschafft deductis deducendis beträgt, so kommt die Masse.

2.) Dividire man die gefundene Massam mit 4, und multiplicire den Quot mit 3, so kommt erstenfalls die Quarta Falcidia, und im andern Fall der Dodrans.

3.) Inferire man nach der Regula Societatis (§. 775.) wie die Summa Legatorum gegen den Dodrantem, also auch iedwed besonder Legatum gegen seine davor zu empfangende Portion.

Z. E. Titius verläst 2452 fl. ist aber 930 fl. schuldig, und kostet das Begräbniß mit Inventur-Gebühren 250 fl. Nun hat er Johanni 500 fl. Paulo 300 fl. Jacobo 250 fl. legiret, zum Erben aber eingesetzet Petrum ex tertia, und Philippum ex duabus reliquis partibus hereditatis. Fragt sichs, wie viel ieder Erbe und Legatarius bekommen soll? *

2452 Verlassenschafft

930. Schuld
250. Unkosten

1180 Subtr.

1272 fl. die Massa.
Nun inferire man:

1272

4) 318. Quarta Falc.
(3
954 fl. Dodrans.

500
300
250

1050. Sum. Legatorum.

* Man besehe hiervon des Herrn Wiegeri J. U. L. und ehemahligen Prof. Math. zu Straßburg Specimen usus Matheseos in Rebus Civilibus, oder Dissert. de modo computandi Quartam Falcidiam. Strasb. 1721.

1050 bekommen 954 { was 500? Fac. 454 — 2/7
300? Fac. 272 — 4/7
250? Fac. 227 — 1/7

Summa: 954

Aus der Quarta (318) bekömmt Petrus 1/3 = 106 fl.
und Philipp: 2/3 = 212 fl.

Summa: 318

551. Daferne aber ein oder etliche Erben insonderheit mit einem Legat beschwehret würden, so kan man eines ieden Erbschafft, als eine abgesonderte ansehen, und alsdann eben auch nach voriger Regul verfahren, z. E. Zusatz.

Einer verläst nach seinem Tode an Baarschafft 3200 Thl. setzet Sempronium und Cajum als gleiche Erben ein. Sempronius aber soll Titio 1000, und Sejo 600 Thl. hinaus geben. Da nun in diesem Fall des Sempronii Antheil durch die Legata gantz erschöpffet würde, fragt sichs, wie viel iedem Legatorio soll abgezogen werden? Facit: Titio 250. und Sejo 150 Thl.

3200

2) 1600 = der Erbschafft Caji. wie auch Sempronii.

4) 400

(3
1200 = Dodranti aus Sempronii Erbschafft.
1000 Legatum Titii.
600. Legatum Seji.

1600. Nun inferire man:

1600 ——„ 1200 ——„ 1000? Fac. 750.
——„ 600? Fac. 450.

	1000	600
Subtr.	750	450
	250 Abzug von Titii, von Seji Legato.	150 Abzug

Probe: 250
150

400 Qv. Falc. Sempronii.

γ.) Von unterschiedenen andern Erbschaffts-Antheilen.

552. Ein Civis Romanus hinterläst seiner schwangern Frau 5600 Ducaten, verordnet im Testament, dafern sie eines Sohnes genesen würde, solte der Sohn $\frac{2}{3}$ und die Mutter das übrige Drittheil des Vermögens haben, so sie aber mit einer Tochter niederkommen würde, solte die Tochter $\frac{1}{3}$ und die Mutter die übrigen zwey Drittheil bekommen. Nun aber bringt über Vermuthen die Frau einen Sohn und eine Tochter zur Welt, fragt sichs, wie nunmehr die Abtheilung der Erbschafft ein zu richten?

Aus dem Willen des Testatoris erhellet so weit, daß die Mutter doppelt so viel als die Tochter, und der Sohn doppelt so viel als die Mutter haben sollen, derowegen setze man, die Tochter bekäme x

so bekommt die Mutter	=	$2x$
und der Sohn	= =	$4x$
Summa	$7x$ =	5600

7)

Dahero	x =	800 v. die Tochter
folglich		1600 v. die Mutter
Und		3200 v. den Sohn
Summa:		5600. *

* Digest. L. 28. T. 2. pag. 13.

853. Cicero in seiner Oration pro Cecinna l. 3. c. 13. erzehlet, daß eine Frau den Cecinnam zum Erben eingesetzt, und zwar auf 11 Unzen und 3 Sextulas (ex deunce & semuncia) alles ihres Vermögens. Aber zwey Sextulas davon soll Marcus Fulcinius und die übrige Sextulam Ebutius haben. Nun lässet solche Frau 2500 Louis, wie viel sollen demnach der Erbe und die Legatarii bekommen? Exempel.

Not. Bey denen Römern hieß die gantze Erbschafft *AS*, wurde in 12 = Theile oder Uncias getheilet, eine Uncia aber hielte wieder 6 gleiche Theile, so Sextulæ genennet wurden.

1 *AS* = 12 Unc.
(6
1 *AS* = 72 Sext.

Hiervon 3. Sextulæ Legata.

Restiren 69 Sextulæ pro Cecin.

Dahero inferire man:

(4
72 — „ 69 — „ 2500? Fac. 2395 60 | 15 — Cec.
72 | 18

13
72 — „ 1 — „ 2500? Fac. 34 — (2 Ebut.
18
8

folglich 69 — Fulcin.
18

Summa: 2500

854. Titius verläst 12000 Thl. davon soll A $\frac{1}{8}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{8}$ und D den Rest haben. C aber stirbt darauf auch, und vermacht das seine denen übrigen Erben nach Proportion ihrer Antheile, wie viel wird alsdann ein ieder zu empfangen haben? Exempel.

Weil A, B, C zusammen $\frac{6}{8}$ machen, so bleibt vor D $\frac{2}{8}$.

Demnach sey die Rationes

A, 1 B, 2 C, 3 D, 2 und A + B + D = 5 (§. 362.)

$\frac{3}{8}$ aus 12000 = 1500. 3 = 4500

Derowegen inferire man nach §. 774.

5 —— 4500 ——
5) ——————
1 —— 900

{ 1 ? Fac. 900. A
{ 2 ? Fac. 1800. B
{ 2 ? Fac. 1800. D

Summa: 4500 Erbsch. von C.

Zu dem bekömmt aus der gantzen Erbschafft

A $\frac{1}{8}$ = 1500
B $\frac{1}{4}$ = 3000
D $\frac{1}{4}$ = 3000

7500 Erbschafft von Titio.
4500 Erbschafft von C.

Summa: 12000.

Exempel. 855. Einer läst 3200 fl. davon soll A 50 fl. mehr, und B anderthalbhundert fl. weniger kriegen, als C. D aber soll 900 fl. erben. Was gehöret nun iedem?

Gesetzt C bekäme x fl.
so empfängt A x + 50
B x - 150

also A, B, C zusammen 3x - 100 derowegen ist
3200 - 3x + 100 = 900 oder

3200 - 3x = 800

2400 = 3x
3) ——————
800 = x Nehmlich vor C, folglich
850 . . . . . vor A
650 . . . . . vor B
900 . . . . . vor D

Sum. 3200 fl.

Noch ein und das andere von einigen Juristischen Berechnungen und Eintheilungen kan man nachsuchen in Leibnitii Arte Combinatoria p. II. §. 12. it. p. 27. seq. desgleichen in des Herrn Nic. Bernoulli Diss. de Usu Artis Conjectandi in Jure.

856. Wie

856. Wie nützlich und nöthig die Application des Calculi in Praxi Medica sey, ist aus denen neuern und accuratern Observationibus derer löblichen Societäten der Wissenschafften und vieler andern gelehrten Männer nicht an einem Orte zu sehen. Also hat z. E. D. Cockburn mit angemercket, daß der purgirenden und vomirenden Medicamentorum Operation sich so wohl nach der Quantität als Dichtigkeit des Bluts richte, und daß ihre Doses eine componirte Proportion haben, nehmlich nach der Vielheit des Bluts und denen Quadraten derer Dichtigkeiten, * wie er denn hiernach seine Tabelle berechnet, allwo z. E. die Constitution 3 erfordert 8 Drachm. Cassiæ, da die Constitution 2 nur 3 Dr. 1 Scr. 13 $\frac{1}{3}$ Gr. erfordert, nehmlich

$3^2 : 2^2 = = 480$ Gran: $213\frac{1}{3}$ Gran. u. s. w.

Nutzen in der Medicin.

Welcher Gestalt auch Herr D. Jac. Keil Quantitatem und Velocitatem Sanguinis, Vim Cordis Sanguinem per totum corpus impellendo, Secretionem animalem und motum Muscularem ad calculum revociret, ist in seinen Tentaminibus Med. Phys. und denenselben angehengten Medicina Statica Britannica nicht weniger wahrzunehmen. ** Auch hat vom Nutzen der Mathesis überhaupt in Arte Salutari Herr Joseph Donzellinus ein ziemliches mit beygebracht, *** und damit man noch hierinne ein und das andere brauchbare Exempel sehen möge, so habe aus dem nützlichen Tractat des Herrn D. Balthasaris de Dosibus Medicamentorum etliche auch deswegen mit anführen wollen, daß man zu denen übrigen desto mehr Appetit kriege.

---

* Philosophical Transactions. Numb. 314. An. 1708. p. 46. f.

** Jac. Keilii Med. D. Tentam. Medico-Physica ad quasdam Quæstiones, quæ œconomiam animalem spectant, accommodata. Lugd. B. 1725.

*** Josephi Donzellini, Antonii Filii, Syposium Medicum, sive Quæstio Convivalis de Usu Mathematum in Arte Medica. Venet. 1707.

95. Aufgabe.

95. Aufgabe

857. **Wenn zwey einfache Dinge von verschiedener Schwehre unter einander vermischet, iedes Quantität aus dem vermischten absonderlich zu finden, als z. E. die Mixtur zweyer ungleich schwehren Liquorum zu examiniren.**

Man inferire: Wie die Differentz beyder Gewichte der Simplicium, gegen die Differentz der Gewichte von dem Vermischten und dem leichtesten, also auch das Spatium des Gefäßleins (z. E. 1.) gegen die Portion solches Spatii, die das schwehreste Simplex eingenommen. Z. E. eine Quantität Anis-Oehl aus einem gewissen Gefäßlein wäge 668. Gran. Eben daraus so viel süß Mandel-Oehl wäge 624. Gran. Nun wäget eben so viel vermischtes, als im ermeldten Gefäßlein Raum gehabt 640 Gran. fragt sichs, wie viel vom schweprern nehmlich dem Anis-Oehl dazu genommen sey?

Die Differentz zwischen 668 und 624 Gr. ist 44.
und zwischen 624 und 640. Gr. ist 16. Dahero

$$44 — \text{„} 16 — \text{„} 1 \text{?} \quad \text{Fac.} \quad \frac{16}{44} \left| \begin{matrix} (4 \\ 4 \\ 11 \end{matrix} \right. \text{Anis-Oehl.}$$

folglich $\frac{7}{11}$ Mandel-Oehl, deswegen die Ration wie 4 gegen 7, das ist wenn 4 Löflein Anis-Oehl, sind 7 Löffelein Mandel-Oehl untereinander vermischt worden.

Beweiß.

Es sey das Spatium, so das schwehreste miscibile einnimmt $=\!=\!= x$ so ist das Spatium des leichteren $=\!=\!= S - x$. Des ersten Schwehre sey P, des andern p, des vermischten π, dann setze man

1.) S hält P was x? Fac. $\frac{Px}{S}$

2.)

2.) S hält p was S — x? Fac. $\frac{pS - px}{S}$

Summa: $\frac{Px + pS - px}{S} = \frac{(P-p)x + pS}{S}$.

Folglich $\frac{(P-p)x + pS}{} = \pi S$ und

$\frac{(P-p)x}{} = \pi S - pS$

$P-p)\quad x = \frac{\pi S - pS}{P-p} = \frac{(\pi-p)S}{P-p}$

858. Verlangt man die Gewichte beyder vermischten Dinge Anmerck. insonderheit zu wissen, so inferire man:

Wie die Differentz beyder Gewichte der Simplicium, gegen die Differentz der Gewichte von dem vermischten und dem leichtesten, also auch das Gewichte des schwehreren Miscibilis gegen das Gewichte seiner vermischten Portion. Z. E. Es sey die Schwehre des Brunnen-Wassers gegen die Schwehre des Spiritus Vini Rectificatissimi wie 5 gegen 4, oder eine Quantität Wasser aus einem gewissen Gefässe wäge 50 Quintlein, und so viel Spiritus Vini Rectificatissimus eben daraus 40 Quintlein. Wie viel hält nun Spiritus Vini nondum dephlegmatus noch Wasser oder Phlegma, dessen solche Quantität 46 Quintlein wäget?

50 − 40 = 10 | 10 giebt 6 was 50? F. 30 Quintlein

46 − 40 = 6. | Phlegma, folglich 16. Qv. S. V. R.

Summa: 46.

Beweiß.

In dem vorhin gefundenen Gewicht des Schwehresten $= \frac{Px}{S}$

substituire man den heraus gebrachten Valorem von $x = \frac{(\pi-p)S}{P-p}$

kömmt $\frac{(\pi-p)SP}{SP-Sp} \Big| \begin{matrix}(S\\ \\ \end{matrix} = \frac{(\pi-p)P}{P-p}$ *

* Vid. De Dosibus Medicamentorum Diatribe Theod. Balthasaris Med. D. ed. Lipf. 1719. pag. 58. seqq.

96. Aufgabe.

96. Aufgabe.

859. Zwey Medicamente, (deren Doses bekannt,) also zu misciren, daß sie zusammen eine gegebene Schwehre und eine gewisse Anzahl Dosium ausmachen, (nehmlich wie weit es die Condition des Problematis zulässet.)

Z. E. Von der Resina Scamoneæ (davon 60 Gr. auf 6 Doses gerechnet,) und die Radice Mechoacannæ (davon 120 Gran auf 3 Doses gerechnet,) soll ein Mixtum von 140 Gran und zwar auf 5 Doses bereitet werden.

Man setze von Scam. 60 Gr. = P, davon 6 Doses = D.
Mechoac. 120 Gr. = p davon 3 = d
Die gegebene vermischte Schwehre 140 Gran = π, und
5 Doses = Δ und verfahre wie folget:

1. Multiplicire man das gegebene Gewicht des andern Medicaments (p) mit der Anzahl der verlangten Dosium (Δ) desgleichen das verlangte Gewicht des componirten Medicaments (π) mit der Anzahl der Dosium des andern, (d) subtrahire dieses Factum vom jenen, so kömt die erste Differentz.

2.) Multiplicire man das gegebene Gewicht des ersten Medicaments (P) mit der Anzahl der Dosium des andern (d) desgleichen das Gewicht des andern Medicaments (p) mit der Anzahl der Dosium des ersten (D) und subtrahire jenes Factum vom diesen, so kömmt die andere Differentz.

3.) Inferire man: Wie die andere zur ersten Differentz, also auch das gegebne Gewicht des ersten Medicaments (P) zu dem vom ersten zunehmenden Theil in die Mixtur.

p.	120	π	140	P,	60	p,	120
Δ	5	d	3	d	3	D,	6
	600		420		180		720
	420						180
	180 I. Diff.						540 II. Diff.

540 giebt 180 was 60?

9)——— 3)
6 2 Fac. 20 Gran von der Res. Scam.
2)——— 140
3 1
folglich 120 Gr. Rad. Mechoac.

Be-

Beweiß.

Man setze das zunehmende Gewicht vom ersten Medicament sey $= x$, so ist das zunehmende Gewicht vom andern $= \pi - x$

Nun schliesse man:

$$P \text{ —}_{//} D \text{ was } x? \text{ Fac. } \frac{Dx}{P}$$

$$\text{ferner } p \text{ —}_{//} d \text{ was } \pi - x? \text{ Fac. } \frac{d\pi - dx}{p}$$

$$\text{Summa: } \frac{Dx}{P} + \frac{d\pi - dx}{p} = \Delta, \text{ das ist}$$

$$Dxp + d\pi P - Pdx = \Delta Pp$$

$$Dxp - Pdx = \Delta Pp - d\pi P$$

$$Dp - Pd) \quad x = \frac{\Delta Pp - d\pi P}{Dp - Pd} = \frac{(\Delta p - d\pi).P}{Dp - Pd}$$

97. Aufgabe.

86. Aufgabe.

860. Die Dosin eines Medicaments nach dem Alter einer Person zu berechnen.

Es setzet vorher belobter Herr Autor * Ætas constans sey 40 Jahr, iedoch a tempore conceptionis, oder ohngefehr $\frac{3}{4}$ Jahr vor der Geburth an zu rechnen, so nun diesem Alter die Dosis maxima zugeeignet würde, ordnet er den Calculum also:

1.) Multiplicire man das beständige Alter mit der grösten Dosi, was heraus kömmt multiplicire man wieder mit der Person ihrem Alter, uud nehme diß letzte Product 4 fach.

2.) Addire man das beständige Alter, und das gegebene der Person zusammen, und quadrire die Summe, (das ist, man multiplicire diese Summe mit sich selbst, so kommt ihr Quadrat.)

3.) Mit dem gefundenen Quadrat dividire man in das vorige 4fache Product, so giebt der Quotus die begehrte Dosin.

Q. E.

Z. E. Es sey die gröste Dosis von einem Medicament im beständigen Alter 1 Quintlein oder 60 Gran, und man wolte wissen, wie viel man einen Kind von 10 Jahren davon geben solte?

2
Fac. 38 — Gran.
5

40	40	1	
60	10	25	(5
2400	50	31	10 00 2
10	(50	96000	38 — — — *
24000	2500 das Quadr.	25500	25 00 5
(4		2	
96000 das 4 fache Produkt.			

Anmerck. 861. Wie man aus mehrern z. E. aus 3 verschiedenen Mixtis, deren iedes auch aus dreyen Simplicibus miscirt, ein neu determinirtes Mixtum berechnen soll, lehret der Herr Prof. Gravesand. **

Nutzen in der Philosophie. 862. Endlich zeiget auch hier und da die Anbringung des Calculi in der Philosophie, daß unterschiedene Kräffte ein und das andere gar nicht, manche aber dis und jenes nur in so und so weit hervor zu bringen vermögend seyn, welches so wohl in Physicalischen, als Cameral und Oeconomischen Einrichtungen gar offte unnöthige Kosten ersparen, und den vollkommnern Effect vor den unvollkommnern erwehlen lehret. Und könnte man hiervon gar viele Berechnungen, z. E. von den zulänglichen Kräfften der Lufft, des Feuers, des Wassers, des verschiedlich gemischten Erdreichs und vieler andern Dinge mit beybringen, so aber die zu diesem Werckgen noch übrige Blätter vor diesesmahl nicht erlauben wollen, weswegen den geehrten Leser auf allerhand gute Exempel unten angezogener Autorum hiermit ablegiren will. ***

Anmerck. 863. Ubrigens hat der Herr Hutcheson auch in der Morale gewiesen, daß die Moral-Importance eines Agentis oder das

* Den Beweß davon besehe man in letzt angezogenem Buche Cap. 6. p. 167. seq.

** Vid. Herr G. I's Gravesande Elem. Matheseos Universalis pag. 90.

*** Vid. Herrn Hof-Rath Wolfii Aërometrie. Herrn D. Liebknechts Pyrometrie. Varignon du Mouvement & de la Mesure des Eaux. Michelini della Direzione de Fiumi. Bradley Philosophical and Practical Improvements of Planting and Gardening.

Momen-

Momentum Boni publici in Ratione composita iedes Gutwilligkeit und Capacität sey, ingleichen, daß das Momentum boni privati oder Interesse einer Person in einer componirten Ration aus iedes Selbstliebe und Capacité bestehe, und daher die Virtutes Agentium, oder ihre Gutwilligkeiten sich directe wie die von ihnen producirten Momenta Boni, und inverse wie ihre Capacitäten verhalten, und so weiter. *

Anmerck.

864. Von Calculationen unterschiedener Wahrscheinlichkeiten haben die berühmten Männer Hugenius, Montmort, Craigius, Moivre, und die Bernoulli allbereit viel nützliches geschrieben, und wer sonst Lust zu appliciren hat, wird alda genugsame Gelegenheit finden. Welchergestalt auch nach der Arte Combinatoria in denen Philosophischen Disciplinen öffters das Fundamentum Divisionis müsse beobachtet werden, und wie weit etwa die Versetzung so wohl der Wörter, als gantzer Propositionum statt finde, davon hat der Herr von Leibnitz ** der P. Prestet *** der P. Lamy **** und andere mehr viel brauchbare Exempel gegeben.

Nutzen der Algebræ in der Kauffmanschafft

865. Einige Nutzungen der Algebræ in der Kauffmanschafft zeigen sich alsdann am allerbesten, wenn manche Aufgaben wegen der vielen und offt besondern Umstände fein intricat werden, und hat ein Membrum (der Meditirende genannt,) der löblichen Hamburger Rechnungs-Gesellschafft schon etliche hieraus dienliche Problemata mit beygebracht. ***** Auch daß man z. E. in der Æstimation der Juwelen nach der Ratione Duplicata verfahren, und inferiren müsse: Wie des einen Gewichts-Quadrat gegen seinem gegebenen Preiß, also auch des andern Gewichts-Quadrat zu seinem gesuchten Preiß, (das ist, wenn des einen gegebenes Gewicht a, der gegebene Preiß b, des andern gegebenes Gewicht c, und sein gesuchter Preiß x,

so ist $a^2 : b = c^2 : x$, folglich

$a^2 x = b c^2$ und

$x = b c^2 : a^2$

oder wenn $a = 1$ ist $x = b c^2$)

solches hat der berühmte Juwelier Jo. Bapt. Tavernier selbst approbiret, wie Dethl. Cluver meldet. †

---

* V. Fr. Hutcheson Inquiry into the Original of our Ideas of Beauty and Virtue. pag. 182.

** Leibnitius in Arte Combinatoria. *** P. Prestet Elem. des Math. p. 113. seq. **** P. Lamy Elem. des Mathemat: pag. 142. seq. ***** In der Hamburger Societät Kunst-Früchten 1. Sammlung p. 109. seq. † Dethl. Cluveri Nova Crisis Temporum, 1700. N. LI. p. 404. seq. wie auch Ej. Disquis. Philosoph. 1706, pag. 32.

98. Aufgabe.

98. Aufgabe.

866. Aus dem gegebenen Werth eines Juwels z. E. eines Diamants von gewissen Caraten, den Werth eines andern dergleichen von mehrern oder wenigern Caraten zu determiniren.

1.) Multiplicire man das Gewicht des andern, (welches Preiß nehmlich verlanget wird,) mit sich selbst, so kömmt sein Quadrat.

2.) Dieses Quadrat multiplicire man mit dem gegebenen Preiß des ersten, und dividire das Factum mit dem Quadrat vom Gewicht des ersten.

Z. E. Ein recht hellleuchtender und wohl facettirter Diamant von 2 Carat wird auf 200 Thl. taxiret, was beträgt einer dergleichen von $22\frac{1}{2}$ Carat? Das Quadrat von $22\frac{1}{2}$ oder $45:2$ ist $2025:4$, dieses mit 200, giebt $405000:4$, solches mit 4 (als dem Quadrat des Gewichts vom ersten) dividirt, giebt $405000:16 = 25312\frac{1}{2}$ Thl.

Zusatz. 867. Demnach so 1. Carat auf 50 Thl. æstimirt wird, käme des Indianischen Moguls grosser Diamant, welchen mit seiner Permission Tavernier selbst gewogen, und von $279\frac{9}{16}$ Carat befunden, auf $(279\frac{9}{16})^2.50$ das ist, auf 3907759 Thl. $13\frac{11}{16}$ Gr.

Von Arithmetischen Instrumenten und Machinen.

Anmerck. 868. Hiervon alles insonderheit abzuhandeln und anzumercken, würde beynahe ein ganzes Buch erfordern, derowegen will nur das vornehmste davon noch überhaupt mit beybringen.

Eintheilung. 869. So viel als meines Orts von dergleichen Instrumentis und Machinamentis wahrgenommen, düncket mir, man könne sie biß anhero eintheilen in solche, so vermitteln 1.) des Ein mahl Eins, 2.) gewisser Räder, 3.) der Logarithmorum, 4.) des Gewichts und der Gleich-Waage das ihrige thun.

Erkl. 870. Die ersten oder Rabdologischen sind diejenige, welche die Columnen aus der Mensula Pythagorica auf beweglichen Flächen also austheilen, daß die Multipla einer verlangten Zahl vom Simplo anzufangen biß aufs Noncuplum immerzu in eine Reihe kom-

kommen, und die Unitates progressionales, (so man sonst im Sinne behalten muß,) also gleich bey ihrer dazu zurechnenden Ziffer von selbsten in die Augen fallen.

872. Die Scheiben- oder Räder-Wercke sind, darinnen man die Unitates progressionales aus einer Scheibe in die andere vermittelst eines zugleich beweglichen Rückers bringt, und die einfachen Unitäten vermöge einiger von 10 Zähnen verfertigten Räder durch vielfachs umdrehen zugleich mit fortzehlet. Erklär.

872. Die Logarithmische heissen solche, da auf eine Fläche die Zahlen nach denen Logarithmis aufgetragen, und dahero die Distantiæ Proportionalium immerzu æquales seyn. Erklär.

873. Die Auswägende sind, da die Zahlen durch Gewicht angegeben, und ihre verschiedene Schwehren nach der bekannten Eigenschafft auf der Schnell-Waage immerhin in ratione reciproca Distantiarum befunden werden. Erklär.

874. Wie die so genannte Rabdologia Neperiana theils auf dünne Blättlein, theils auf 4 eckigte, theils auf runde Stäblein, theils auf den Rücken zehen runder, oder auf zehneckigter Teller soll gemacht und aufgetragen werden, ist in denen seitherigen Scriptis Arithmeticis schon angewiesen, und hat die letzten 2 Arten der seel. Rath Leupold solcherley seinen Machinen mit einverleibet. * Vor ietzo will noch von einer runden Mensula Pythagorica was weniges gedencken, so ich mir vor diesem einmahl von starcken Papier und ohne Kosten gemacht. Von der so genannten Stabs-Rechnung.

1.) Von dergleichen Papier schneide man Zehn oder mehr gröser und grössere Scheiben ohngefehr mit solchen Radiis, wie davon in Fig. 1. nur der zehnde Theil aufgezeichnet. Fig. I.

2.) Theile man ieder Scheibe Rand in 10 ⟌ Theile, ziehe die Theilungen gegen das Centrum, durchschneide die wieder von 9 Theilen entstandenen Rand-Spatia vom andern biß aufs neundte mit Uber-Eck-Linien, und schreibe das Ein mahl Eins nach der Ordnung der 9 Anfangs-Zahlen, wie auch eine Reihe Nullen in die getheilten 10 Theil des Rands von ieder Scheibe, wie einige davon in gemeldeter Figur zu sehen. Fig. I.

3.) Befestige man die kleinste und mittelste Scheibe auf einer dünnen Pappe, iedoch also, daß sich die übrigen Scheiben darunter willig lassen herum drehen, und schreibe auf den Rand der mittelsten Scheibe den Indicem, nehmlich die 9 Numeros Monadicos. Will man noch etliche besondere Reihen vor die Quadrat- und Cubic-Extraction mit zwischen die Scheiben

* Vid. Jac. Leupoldi Theatrum Arithmetico-Geometricum fol. 20. seq. da so wohl die Bacilli Neperi als auch des P. Schotti und Mr. Grillets Rechen-Kästlein, ingleichen seine in einer Capsul beweglichen Rechen-Teller beschrieben sind.

hin-

hinein rücken, so kan es auch sehr wohl und ohne Hindernüß der andern geschehen, und ist das Instrument zum Gebrauch so weit fertig.

99. Aufgabe.

99. Aufgabe. 857. **Vermittelst gedachter Scheiben-Ränder bequehm zu multipliciren und zu dividiren, z. E. Man soll 7934 mit 678 multipliciren.**

Fig. 1. 1.) Drehe man die gröste Scheibe mit denjenigen Zehntheil, so sich von 4 anfängt, auf den Indicem 1, halte sie feste, drehe die darüber liegende mit der Zahl 3 eben auf solchen Indicem, halte nun beyde feste, und rücke nun gleichergestalt auch die drauf folgenden Scheiben mit 9 und 7 auf den ersten Indicem 1, so geben die obenstehende Ziffern 7934 den Multiplicandum.

2.) Das Octuplum hiervon zu bekommen, schreibe man aus der achten Reihe, so grade gegen das Centrum zu gehet, und sich vor dem Indice 8 endigt, die Ziffer 2 aus dem ersten Triangul alleine, diejenigen aber, so in die folgende Rhombos fallen, (als hier 3 und 4) Summatim nehmlich 7, desgleichen (die 2 und 2) 4, ferner (die 7 und 6) 3, und endlich 1 zu 5, kommt zuletzt 6, oder zusammen das Octuplum 63472, und so verfahre man auch mit dem Septuplo und Sextuplo, unterschreibe und addire wie gewöhnlich die Facta partialia, so giebt die Summe das Factum totale.

3.) Da nun auf diese Art von iedem Divisore, als von 7934 also gleich die ersten Multipla vor Augen liegen, und hier z. E. sein Octuplum 63472 ist, so verfahre man wie im 147. §. allbereit angewiesen, als so 658522 mit 7934 zu dividiren wären, eigne man dem Divisori seinen sattsamen Dividuum zu, (hier 65852) dieser fället in sein Octuplum 63472, daher ist der Quotus 8. und restiret 23802, solcher Dividuus fället in das Triplum Divisoris, ist dahero der Quotus 3, und restiret 0, folglich ist der gantze Quot = 83, und so auch mit mehrern.

Fig. 2. Von Räder-Werck. 376. Vom Räder-Werck wird Fig. 2. wegen Enge des Raums nur ein Stück, und um mehrerer Deutlichkeit willen dessen Motus gradlinicht vorgestellet, welchen man alsdenn nach Gefallen schon in eine Circular-Bewegung verwandeln kan. A, B, C sind zehn-Zahnigte Räder, deren 8, 9 oder mehr nach einer Reihe in der Machine feste stehen, und nur schlechthin um ihr Centrum beweget werden. A ist das Unitäten Rad, B der Decadum, C der Centenariorum &c Darüber sind an eben der Achse gleich-grosse oder auch grössere Scheiben m n, p q, r s

Fig. 3. (Fig. 3.) befestiget, davon iede mit 10 Zäpflein (gleich denen Kämmen in einem Kamm-Rad) versehen, auf welcher Scheiben obern Flächen die zehen Ziffern: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 stehen,

davon

davon dann aus ieder Scheibe eine solche Ziffer auf einmahl durch eine kleine Oeffnung, so oben drüber im Machinen-Deckel gemacht worden, zum Vorschein kömmt.

877. W X, Y Z sind Rücker, welche an der Achse oder auch an der Scheibe fest gemacht, davon derjenige aus dem Unitäten-Rad alsdenn im Zehner-Rad einen Zahn fortrücket, wenn 10 Unitäten herum gedrehet sind, und der aus dem Zehner-Rad einen Zahn im Rad der Hunderte fortrücket, wenn 10 Decades herum gelauffen, u. s. w. Welche Rücker iedoch also zu ordonniren sind, daß einer den andern im Umdrehen nicht verhindert, wie Fig. 3. in dem Stückgen Profil die über und unter gedachten Scheiben alternirende Rücker wx und yz zu verstehen geben.

878. Diese bißher erwehnten Räder und Scheiben kan man in einem länglich vier Eckigten Kästlein, so etliche Zoll tieff, einsetzen, und auf vielerley Art befestigen, iedoch also, daß die Register D E F G, H I K L &c. welche hier um mehrerer Leichtigkeit willen in Fig. 2. nur mit gezahnten Linealen vorgestellet, und alle an dem Anschlag α β befestiget, und zugleich gezogen werden, im heraus- und hinein schieben die Zehn-Zahnigten Unitäten- und Zehner-Räder ꝛc. willig und richtig herum treiben. Fig. 2.

879. Die Abtheilung etlicher gezahnten Lineale ist aus Fig. 2 zu ersehen, und sind deswegen zwischen ihren Zähnen leere Spatia gelassen, damit zu der Zeit, wenn das Lineal D E F G ins Unitäten-Rad greifft, das andere Lineal H I K L nicht ins Zehner-Rad komme, und den Progressum Unitatis progressionalis turbire. Am ersten gezahnten Lineal D E F G erscheinen hier z. E. die Zähne zu 4 und vieren, am andern zu 3 und dreyen, und müssen alle Lineale so lang seyn, daß solcherley 9 Zähne mit ihren eben so langen Spatiis zusammen 9 mahl auf iedes Lineal kommen können, davon hier wegen Kürtze des Raums nur zwey Reihen angedeutet, und mit denen Romanischen Zeiger-Ziffern I, I, desgleichen II, II, wie auch IX, IX, VIII. VIII. und VII. VII. &c. bezeichnet sind.

880. Weil aber iedes Lineal eine Abtheilung von 1 zu 1, von 2 zu 2, von 3 zu 3, ꝛc. biß zu 9 und 9 Zähnen erfordert, so ist es bequehmlich, daß solcherley Lineale auf langen und runden Wellen, (deren vorietzt nur Zweye Fig. 3. in d e und f g profiliret, und im folgenden gezahnte, oder auch schlechtweg, Cylindri heissen sollen,) der Länge nach rund um eingelassen, und darinnen befestiget werden, damit man nach Erforderung dasjenige, (als hier das mit 4 und 4, und das mit 3 und 3 Zähnen) so man zur Rechnung nöthig hat, also gleich gegen die Zehn-Zahnigten Räder herum drehen, und damit operiren könne, welche Cylindri aber nicht mehr, oder auch gar nicht mit operiren sollen, die werden auf 0 gestellet, weswegen auch ein Lineal vor die Nulle auf allen dergleichen Cylindris gäntzlich hinweg bleibt. Fig. 3.

Was die Operation anlanget, kan das vornehmste davon ersehen werden aus folgender

100. Aufgabe.

100. Aufgabe. 881. **Durch Hülffe vorhergehender Machine zu multipliciren und zu dividiren.**

Weil eine grosse Zahl (ob sie schon nicht vielmehr Zeit, als eine kleine in der Operation brauchet,) auf einmahl hier nicht deutlich können vorgestellet werden, hat man indessen eine kleinere genommen, deren Verfahren man auch gar bequehmlich auf grössere appliciren kan, z. E. Es sey 34 zu multipliciren mit 25.

1.) Rücke man vermittelst des kleinern Angriffs oben an denen Achsen die obern Scheiben (folglich auch die Zehnzahnigten Räder) alle auf o, nehmlich daß lauter Nullen, durch die kleinen Oeffnungen im Machinen-Deckel zum Vorschein komen, und weil 3 Decades und 4 Unitäten sollen multiplicirt werden, drehe man den ersten Cylinder d e auf 4, und den andern f g auf 3, die übrigen aber lasse man auf o stehen bleiben.

2.) Ziehe man mit dem Anschlag α β (so anfangs über der Linie γ δ stehet, zu welcher Zeit auch das Unitäten-Rad noch auf o gewiesen,) die gezahnten Cylinder biß nach der 5ten Abtheilung heraus, die alsdann der Römische Index V wird anzeigen, (weil hier die erste Nota Multiplicatoris 5 ist,) so werden durch die kleinen Oeffnungen im Deckel 170 erscheinen.

3.) So bald dies geschehen, drehe man den ersten und andern Cylinder wieder auf o, ziehe also den gantzen beweglichen Theil der Machine heraus, stelle alsdann den ersten und andern Cylinder wieder auf 4 und 3, und rücke nun mit ihnen um eine Stelle weiter fort, nehmlich daß der erste, so vorhin in D E F G beym Unitäten-Rad gestanden, nunmehro in den Locum M N O P zum Zehner-Rad, und der andere Cylinder, so vorhin in H I K L gestanden, nunmehro in den Locum Q R S T oder zum Hundert-Rad komme, u. s. w.

4.) Weil ferner die andere Nota Multiplicatoris 2 ist, schiebe man den also gestellten beweglichen Theil der Machine um 2 Abtheilungen, (welche nehmlich vom andern Ende her die Römischen Indices II, und II anzeigen werden,) wieder hinein, so wird alsdann durch die obern kleinen Oeffnungen im Deckel des unbeweglichen Theils der Machine das gantze Haupt-Factum, (worinnen die Facta partialia allbereit schon von selbsten addirt worden,) nehmlich 850 gar deutlich zu ersehen seyn.

5.) Da ferner die Division wieder aus einander nimmt, was die Multiplication zusammen gesetzet, darff man vorhergehende Operation nur rückwerts machen, so siehet man auch gar bald daraus die Operation in der Division.

882. Um dieses alles sich aufs leichteste vorzustellen, darff ie- Anmerck.
mand nur 3 biß 4 dergleichen 10 zahnigte Räder indessen nur von einem Span oder Pappe nebst denen daran fest gemachten Rückern und also notirten Ziffern, (wie hier in Fig. 2 bey A. B, C zu sehen) auf einem Tisch mit einem Stifft befestigen, und sie nach vorhin gedachter Bewegung herum drehen, so wird ihm so wohl der richtige Effect, als auch die weitere Zusammensetzung der Machine sonder Schwürigkeit in die Augen fallen, und daher der wahre Grund zu dergleichen Räder-Werck nicht lange verborgen bleiben. *

Von 1. Logarithmischen Instrument. Fig. 4.

883. Wenn zu einem Logarithmischen Instrument Fig. 4. eine Circular-Fläche a b c d an der Achse eines Cylinders befestiget, und zuvor deren Umfang in eine beliebige Anzahl gleicher Theile ═══ N getheilet worden, um den Cylinder aber Gangweise herum die Numeri vulgares, (wie auch hernach die Applicati, als Thl. Gr. Pf. Centn. Pfund Loth ꝛc.) Z. E. Von 1 biß auf 10000 ═══ m sollen getragen werden, so wird aus der Lehre und Nutzung der Logarithmorum, so künfftig Geliebt es GOtt, zu Ende der Geometrie abhandeln will, gar bald erweißlich seyn, daß, wenn der Logarithmus von m ═══ L, und eine beliebige Prim-Zahl ═══ p, deren Log: ═══ l alsdann der gleiche Theil des Circularen-Umfangs, so den Situm der Prim-Zahl auf der Cylinder-Fläche in seinem gehörigen Umgang anzeiget

═══ (e N l.) : L

Z. E. Um diesen Cylinder gehen 8 runde Umgänge, und ist die Abtheilung biß auf die Zahl 10000 gerechnet, der daran befestigte Circul-Umfang aber ist in 500 gleiche Theile getheilet, so nun z. E. der Situs von der Prim-Zahl 7 solte determiniret werden, inferire man:

Log. von 10000		500. 8		Log. von 7	
400000	giebt	4000	was	845 |	10?
4) — ///		— ///		500 |	
100 — //		1			

Fac. 345. 1

Nehmlich 7 fället in den andern Umgang, und zwar dessen 345 Theil gegen über, und also auch mit denen übrigen Prim-Zahlen, denn die compositi und applicati geben sich hernach von selbsten.

884. Zu den Gebrauch dieses Instruments ist zuvor noch mit Anmerck.
beyzubringen, daß immediate hinter der an der Achse unbeweg-

* Mehr von solcherley Machinen als des Leibnitii, besehe man in Miscell. Berolin. Part I. p. 317. des Herrn Poleni in seinen Miscellaneis pag. 27. seq. und in Leupoldi Theat. Arithm. l. c.

lichen Circular-Fläche a b c d, noch eine um die Axin des Cylinders bewegliche runde Fläche e f g h sey, so auf ihrer Stirne eine tieffe Krinne hat, in welcher man die Indices i und k nach denen auf gedachten Cylinder stehenden Zahlen beliebig kan fortstecken, ingleichen daß grade oben über dem Cylinder eine scharff angezogene Meßinge Clavir-Säite, l m ausgespannet sey, die auf dem einen Fulcro der Axis angemacht, und sich von einem darauf gestellten unbeweglichen Haupt-Indice n p anfänget, und auf dem andern Fulcro wieder fest angebunden ist, solche Säite l m mit dem unbeweglichen Haupt-Indice n p dienet, die beweglichen Zeiger i und k fein accurat mit denen darunter zuführenden Zahl-Puncten in Situm coincidentem zu bringen, wie bald mit mehren wird zu vernehmen seyn aus folgender

101. Aufgabe.

101. Aufgabe.

885. Die Proportion-Regul, folglich auch die Multiplication und Division durch blosses umdrehen solches Instruments zu expediren.

Z. E. Es sey zu 8, 26, und 44 die vierdte Proportional-Zahl zu finden.

1.) Durch das Umdrehen des Cylinders führe man die Ziffer 8 unter die ausgespannte Säite l m, und stelle den Indicem i auf der beweglichen runden Fläche e f g h hinter den unbeweglichen Haupt-Indicem n p accurat in Situm coincidentem.

2.) Führe man auch in dem folgenden Umgang die Zahl 26 unter die ausgespannte Säite, und stelle den andern Indicem k auf der noch also stehen gebliebenen runden Fläche ebenfalls hinter den unbeweglichen Haupt-Indicem in Situm cöincidentem.

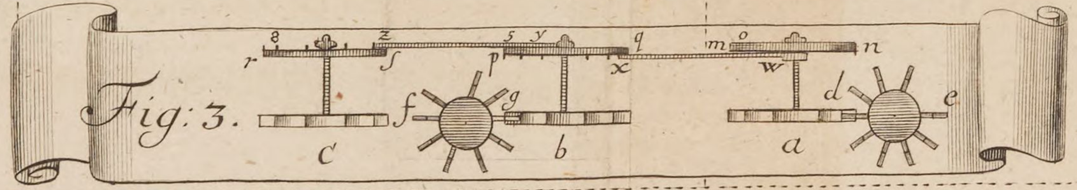
3.) Drehe man 44 unter die ausgespannte Seite, und rücke die bewegliche runde Fläche mit dem ersten und noch fest stehenden Indice i hinter den Haupt-Indicem in Situm cöincidentem, dann volvire man den Cylinder mit dem andern Indice k hinter den Haupt-Indicem n p, so zeiget sich unter der ausgespannten Säite l m die vierdte Proportionalis, (auf dem nach 44 folgenden andern Umgang) nehmlich 143, so zu finden war.

4.) Weiln in der Multiplication 1 zu dem Multiplicanten, wie der Multiplicandus gegen das Product, und in der Division, der Divisor gegen 1, wie der Dividendus gegen den Quot, so absolviret man auch nach vorigem hiermit die Multiplication und Division. Allermassen zuletzt die Abtheilungen ziemlich nahe zusammen lauffen, kan man den Cylinder auch desto

Anmerck.

dicker

Fig: 3.



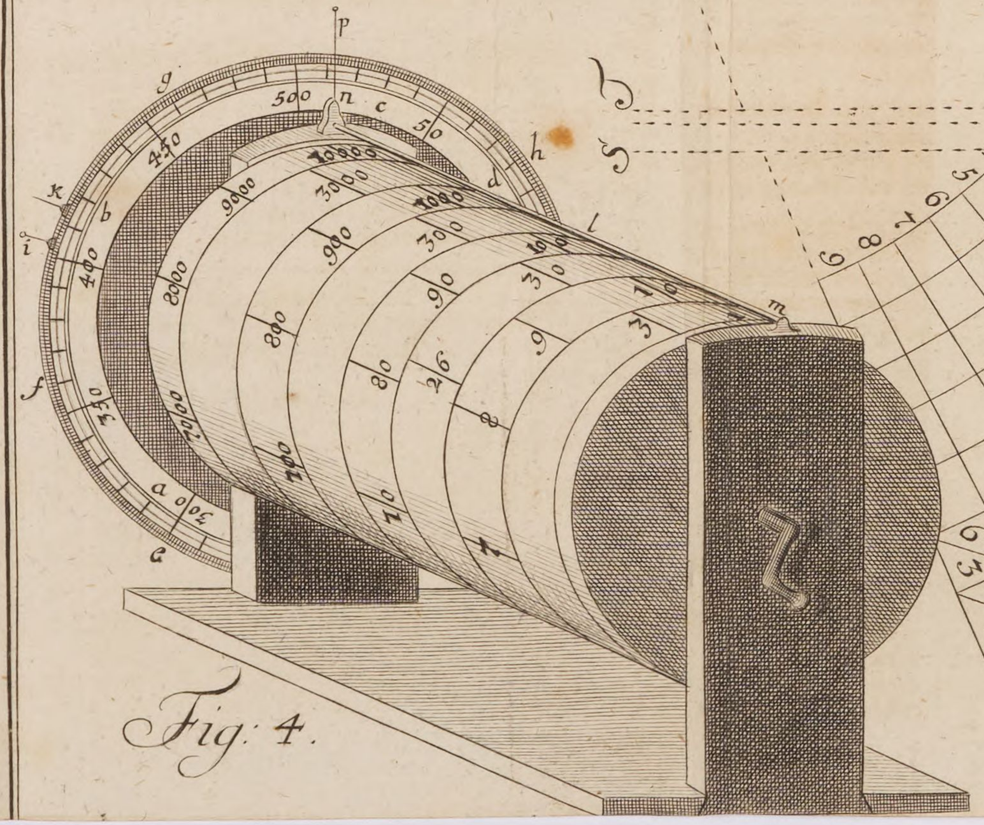
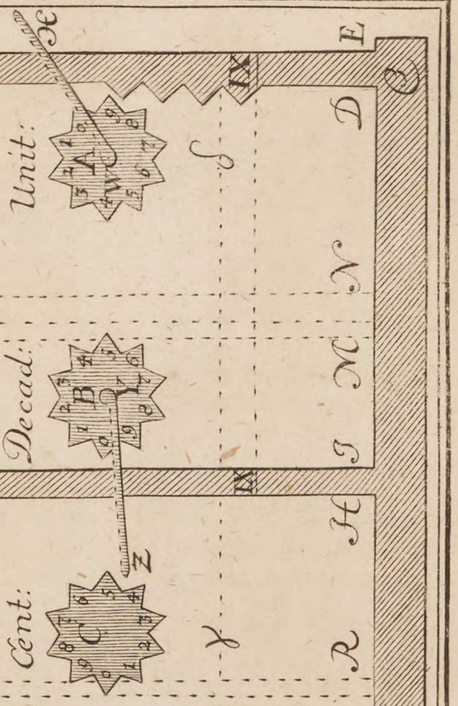


Fig: 4.

Fig: 2.



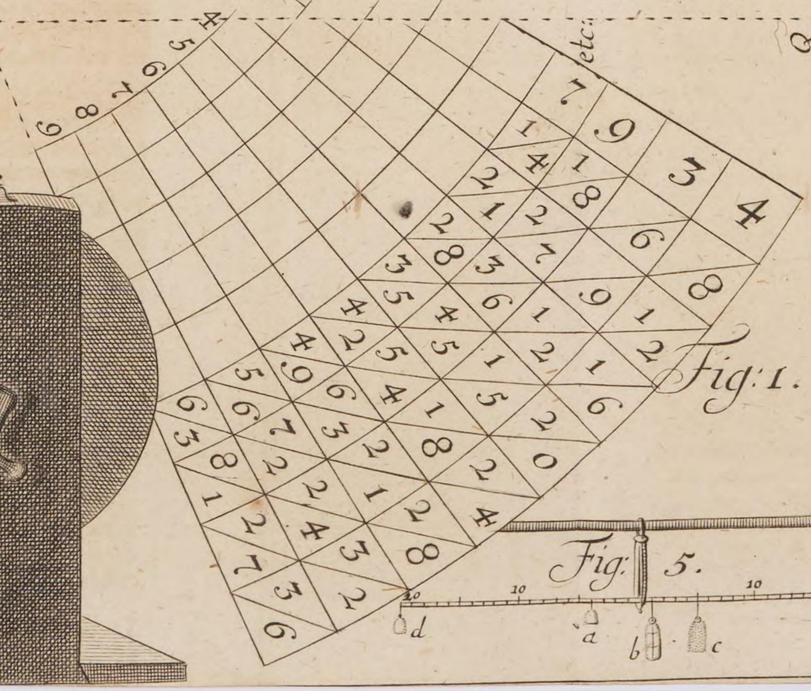


Fig: 1.

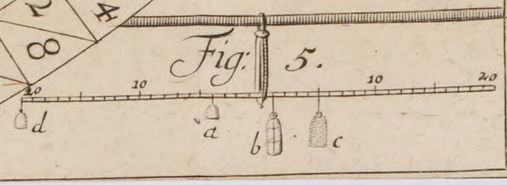


Fig: 5.

LBC

dicker, etwas länger und mit mehrern Umgängen machen lassen, so werden die letzten Zahlen schon weiter auseinander kommen. *

886. Von einem auswägenden Instrument, oder einer Rechnungs-Waage hat der Herr Cassini allbereit ein Exempel mit beygebracht, ** und wird auf solcher nicht nur das Gewicht, sondern auch der gantze Werth der gewogenen Waare mit angezeiget. Sie bestehet aus einer langen gleich-armigen, und in viel kleine gleiche Theile ausgetheilten Schnell-Waage (Fig. 5.) da man z. E. die Waare b an einem seidenen oder härnen Strickgen in 1 hänget, und das Schieber-Gewicht, (hier z. E. 1 Pf.) auf der andern Seite ins Æquilibrium schiebet, so zeiget hier der 4te Punct (worinnen es hänget,) daß das Gewicht dieser Waare 4 Pf. sey. Wäre nun der Preiß eines Pfundes z. E. 5 Gulden, so rücke man die Waare in den Punct 5 (wie hier in c punctirt angedeutet,) und bewege das Schieber-Gewicht a (nehmlich 1 Pf.) so weit hinaus, biß es in d, (so hier gleichfalls punctiret,) wiederum ins Æquilibrium kömmt, so zeiget es im Hänge-Punct, (hier in 20) auch so gleich den sonst zuberechnenden Werth solcher Waare. Von einem auswägenden Instrument. Fig. 2.

887. Weil zu manchen Sachen eine Waag-Schaale zu gebrauchen, müste man ihr vorher bekannt Gewichte bey dergleichen Operationen alsdenn noch subtrahiren, wie aus denen Eigenschafften der Schnell-Waage bekannt, und hat man deswegen allhier ein ein Exempel in kleinen Zahlen gesetzet, weil es deutlicher zu begreiffen, und die grössern Zahlen theils ein grösser Gewicht, theils nur eine mehrere und weitere Abtheilung eines langen Waage-Balckens erfordern. Anmerck.

* Fast dergleichen, aber in Plano hat der Herr Beselin in seiner Trigonometria Curiosa publiciret. ** Journal des Scavans 1676. pag. 295. ingleichen Leup. Theatr. Static. Univ. pag. 57. seq.

E N D E.

CORRIGENDA.

Pag. 5. lin. 18. vor dritten, lese man vierdten.

Pag. 62. lin. 26. p. Quotas, l. Quotus.

Pag. 65. lin. 4. pro $\frac{20}{9}$ l. $\frac{9}{20}$

Pag. 112. lin. antepen. lese man (§. 224. und 69.)

Pag. 137. lin. antepenult. vor 173. lese man 273.

Pag. 170. lin. 18. lese man $ay \equiv x \equiv bz$.

Pag. 172. lin. 14. pro Bedienung lese Bedingung.

Pag. 173. lin. 14. pro keinere, l. kleinere.

Pag. 178. lin. 25. vor $a > 1$ lege $a > b$

Pag. 184. lin. 12. vor 3, 4, 6. lege 3, 4, 9.

Pag. 188. lin. 14. vor $\frac{m}{1}$ lege $\frac{m}{1}$

Pag. 190. lin. penult. vor 70. lege 28.

lin. ultima vor $\frac{111}{40}(2\frac{31}{40}$ lege $\frac{69}{40}(1\frac{29}{40}$

Pag. 215. lin. 28. p. habetuus. l. habemus

Pag. 265. lin. 11. nach (§. 56, 58, 59 setze man und 61.)

Pag. 285. lin. 5. nach §. 353, setze man auch noch 362.

Pag. 288. lin. 16 vor $3n-2n$ l. $3n^2-2n$.

Pag. 295. lin. 9. vor 17330508. l. 17320508.

Pag. 311. lin. ultim. lege §. 523 und 559.

ad Pag. 314. in der Tabelle lin. ult. p. folgen, l. folgenden.

Pag. 326. lin. 7 pro 8:2 lege 8:3

Pag. 336. lin. 16. p. $9-3\sqrt{5}$ l. $9+3\sqrt{5}$

Pag. 357. lin. 1. pro auf, lese man aus

Pag. 380. lin. 7. p. $\frac{12}{27}$ lege $\frac{27}{14}$

Pag. 382. lin. 22. lege $\frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$

Pag. 401. lin. 23. p. Proportionum, l. Proportionem.

Pag. 461. lin. ult. pro 13 001 lege 13 - 001

Pag. 462. lin. 15. p. 13 001. l. 13 - 001. ingleichen lin. antepen.

Pag. 463. lin. 18. pro †0.2872 lege †0.2873

Pag. 464. lin. 18. pro - 2x 3 lege - 23x.

Pag. 493. lin. 1 pro m l. in

Pag. 495. lin. 18. p. auf, l. auch.

In der Anatom. Numer.

bey N. 192. pro 2.7.13. lege $2^6.3$.

bey N. 671. pro 11. 67. lege 11. 61.

Pag. 41. lin. 11. p. Eactores l. Factores

lin. penult. p. an, l. in,

Pag. 46. lin. 4. p. 23. lege 13.

ANATOMIA NUMERORUM,

Oder

Zergliederung der Zahlen

Von 1 biß 10000.

Deren Gebrauch am Ende durch allerhand nützliche Exempel angewiesen wird.

von

J. M. P.

Landesbibliothek
Coburg

N.	Elem.
1	
2	
3	
4	2.2
5	. .
6	2.3
7	. .
8	2.2.2
9	3.3
10	2.5
11	. .
12	2.2.3
13	. . .
14	2.7.
15	3.5
16	2.2.2.2
17	. . . .
18	2.3.3.
19	. . .
20	2.2.5
21	3.7
22	2.11
23	. .
24	2.2.2.3
25	5.5
26	2.13
27	3.3.3
28	2.2.7
29	. . .
30	2.3.5
31	. . .
32	2.2.2.2.2
33	3.11
34	2.17
35	5.7
36	2.2.3.3
37	. . .
38	2.19
39	3.13
40	2.2.2.5
41	. . .
42	2.3.7
43	. . .
44	2.2.11
45	3.3.5
46	2.23
47	. . .
48	2.2.2.2.3
49	7.7
50	2.5.5.
51	3.17
52	2.2.13
53	. . .
54	2.3.3.3
55	5.11
56	2.2.2.7
57	3.19
58	2.29
59	. .
60	2.2.3.5
61	. . .
62	2.31
63	3.3.7
64	2.2.2.2.2.2
65	5.13
66	2.3.11
67	. . .
68	2.2.17
69	3.23
70	2.5.7
71	. . .
72	2.2.2.3.3.
73	. . .
74	2.37
75	3.5.5
76	2.2.19
77	7.11
78	2.3.13
79	. . .
80	2.2.2.2.5
81	3.3.3.3
82	2.41
83	. . .
84	2.2.3.7
85	5.17
86	2.43
87	3.29
88	2.2.2.11
89	. . .
90	2.3.3.5
91	7.13
92	2.2.23
93	3.31
94	2.47
95	5.19
96	2.2.2.2.2.3
97	. . .
98	2.7.7
99	3.3.11
100	2.2.5.5.
101	. . .
102	2.3.17
103	. . .
104	2.2.2.13
105	3.5.7

N.	Elem.
106	2.53
107	. . .
108	2.2.3.3.3
109	. . .
110	2.5.11
111	3.37
112	2.2.2.2.7
113	. . .
114	2.3.19
115	5.23
116	2.2.29
117	3.3.13
118	2.59
119	7.17
120	2.2.2.3.5
121	11.11
122	2.61
123	3.41
124	2.2.31
125	5.5.5.
126	2.3.3.7
127	. . .
128	2.2.2.2.2.2.2
129	3.43
130	2.5.13
131	. . .
132	2.2.3.11
133	7.19
134	2.67
135	3.3.3.5
136	2.2.2.17
137	. . .
138	2.3.23
139	. . .
140	2.2.5.7
141	3.47
142	2.71
143	11.13
144	2.2.2.2.3.3
145	5.29
146	2.73
147	3.7.7
148	2.2.37
149	. . .
150	2.3.5.5
151	. . .
152	2.2.2.19
153	3.3.17
154	2.7.11
155	5.31
156	2.2.3.13
157	. . .
158	2.79
159	3.53
160	2.2.2.2.2.5
161	7.23
162	2.3.3.3.3
163	. . .
164	2.2.41
165	3.5.11
166	2.83
167	. . .
168	2.2.2.3.7
169	13.13
170	2.5.17
171	3.3.19
172	2.2.43
173	. . .
174	2.3.29
175	5.5.7
176	2.2.2.2.11
177	3.59
178	2.89
179	. . .
180	2.2.3.3.5
181	. . .
182	2.7.13
183	3.61
184	2.2.2.23
185	5.37
186	2.3.31
187	11.17
188	2.2.47
189	3.3.3.7.
190	2.5.19
191	. . .
192	2.7.13
193	. . .
194	2.97
195	3.5.13
196	2.2.7.7
197	. . .
198	2.3.3.11
199	. . .
200	2.2.2.5.5.
201	3.67
202	2.101
203	7.29
204	2.2.3.17
205	5.41
206	2.103
207	3.3.23
208	2.2.2.2.13
209	11.19
210	2.3.5.7

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
211	. . .	246	2.3.41	281	. . .
212	2.2.53	247	13.19	282	2.3.47
213	3.71	248	2.2.2.31	283	. . .
214	2.107	249	3.83	284	2.2.71
215	5.43	250	2.5.5.5	285	3.5.19
216	2.2.2.3.3.3	251	. . .	286	2.11.13
217	7.31	252	2.2.7.9	287	7.41
218	2.109	253	11.23.	288	2.2.2.2.2.3.3
219	3.73	254	2.127	289	17.17
220	2.2.5.11	255	3.5.17	290	2.5.29
221	13.17	256	2.2.2.2.2.2.2.2	291	3.97
222	2.3.37	257	. . .	292	2.2.73
223	. . .	258	2.3.43	293	. . .
224	2.2.2.2.2.7	259	7.37	294	2.3.7.7
225	3.3.5.5	260	2.2.5.13	295	5.59
226	2.113	261	3.3.29	296	2.2.37
227	. . .	262	2.131	297	3.3.3.11
228	2.2.3.19	263	. . .	298	2.149
229	. . .	264	2.2.2.3.11	299	13.23.
230	2.5.23	265	5.53	300	2.2.3.5.5.
231	3.7.11	266	2.7.19	301	7.43
232	2.2.2.29	267	3.89	302	2.151
233	. . .	268	2.2.67.	303	3.101
234	2.3.3.13	269	. . .	304	2.2.2.2.19
235	5.47	270	2.3.3.3.5	305	5.61
236	2.2.59	271	. . .	306	2.3.3.17
237	3.79	272	2.2.2.2.17	307	. . .
238	2.7.17	273	3.7.13	308	2.2.7.11
239	. . .	274	2.137	309	3.103
240	2.2.2.2.3.5	275	5.5.11	310	2.5.31
241	. . .	276	2.2.3.23	311	. . ..
242	2.11.11	277	. . .	312	2.2.2.3.13
243	3.3.3.3.3	278	2.139	313	. . .
244	2.2.61	279	3.3.31	314	2.157
245	5.7.7	280	2.2.2.5.7	315	3.3.5.7

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
316	2. 2. 79	351	3. 3. 3. 13	386	2. 193
317	. . .	352	2.2.2.2.2.11	387	3. 3. 43
318	2. 3 53	353	. . .	388	2. 2. 97
319	11. 29	354	2. 3. 59	389	. . .
320	2.2.2.2.2.5	355	5. 71	390	2. 3. 5. 13
321	3. 107	356	2. 2. 89	391	17. 23
322	2. 7. 23	357	3. 7. 17	392	2. 2. 2. 7. 7
323	17. 19	358	2. 179	393	3. 131
324	2.2.3.3.3.3	359	. . .	394	2. 197
325	5. 5. 13	360	2.2.2.3.3.5	395	5. 79
326	2. 163	361	19. 19	396	2. 2. 3. 3. 11
327	3 109	362	2. 181	397	. . .
328	2. 2. 2. 41	363	3. 11. 11	398	2. 199
329	7. 47.	364	2. 2. 7. 13	399	3. 7. 19
330	2. 3. 5. 11	365	5. 73	400	2. 2. 2. 2. 5. 5
331	. . .	366	3. 2. 61	401	. . .
332	2. 2. 83	367	. . .	402	2. 3. 67
333	3. 3. 37	368	2. 2. 2. 2. 23	403	13. 31
334	2. 167	369	3. 3 41	404	2. 2. 101
335	5. 67	370	2. 5. 37	405	3. 3. 3. 3. 5
336	2.2.2.2.3.7	371	7. 53	406	2. 7. 29
337	. . .	372	2. 2 3. 31	407	11. 37
338	2. 13. 13	373	. . .	408	2. 2. 2. 3. 17
339	3. 113	374	2. 11. 17	409	. . .
340	2. 2. 5. 17	375	3 5. 5. 5	410	2. 5. 41
341	11. 31	376	2. 2. 2. 47	411	3. 137
342	2. 3. 3. 19	377	13. 29	412	2. 2. 103
343	7. 7. 7.	378	2. 3. 3. 3. 7	413	7. 59
344	2. 2. 2. 43	379	. . .	414	2. 3. 3. 23
345	3. 5. 23	380	2. 2. 5. 19	415	5. 83
346	2. 173	381	3. 127	416	2. 2. 2. 2. 2. 13
347	. . .	382	2. 191	417	3. 139
348	2. 2. 3. 29	383	. . .	418	2. 11. 19
349	. . .	384	2.2.2.2.3.2.2.3	419	. . .
350	2. 5. 5. 7	385	5. 7. 11	420	2. 2. 3. 5. 7

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
421	. . .	456	2. 2. 2. 3. 19	491	. . .
422	2. 211	457	. . .	492	2. 2. 3. 41
423	3. 3. 47	458	2. 229	493	17. 29
424	2. 2. 53	459	3. 3. 3. 17	494	2. 13. 19
425	5. 5. 17	460	2. 2. 5. 23	495	3. 3. 5. 11
426	2. 3. 71	461	. . .	496	2. 2. 2. 2. 31
427	7. 61	462	2. 3. 7. 11	497	7. 71
428	2. 2. 107	463	. . .	498	2. 3. 83
429	3. 11. 13	464	2. 2. 2. 2. 29	499	. . .
430	2. 5. 43	465	3. 5. 31	500	2. 2. 5. 5. 5
431	. . .	466	2. 233	501	3. 167
432	2. 2. 2. 2. 3. 3. 3	467	. . .	502	2. 251
433	. . .	468	2. 2. 3. 3. 13	503	. . .
434	2. 7. 31	469	7. 67	504	2. 2. 2. 7. 9
435	2. 5. 29	470	2. 5. 47	505	5. 101
436	2. 2. 109	471	3. 157	506	2. 11. 23
437	19. 23	472	2. 2. 2. 59	507	3. 13. 13
438	2. 3. 73	473	11. 43	508	2. 2. 127
439	. . .	474	2. 3. 79	509	. . .
440	2. 2. 2. 5. 11	475	5. 5. 19	510	2. 3. 5. 17
441	3. 3. 7. 7.	476	2. 2. 7. 17	511	7. 73
442	2. 13. 17	477	3. 3. 53	512	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2
443	. . .	478	2. 239	513	3. 3. 3. 19
444	2. 2. 3. 37	479	. . .	514	2. 257
445	5. 89	480	2. 2. 2. 2. 2. 3. 5	515	5. 103
446	2. 223	481	13. 37	516	2. 2. 3. 43
447	3, 149	482	2. 241	517	11. 47
448	2. 2. 2. 2. 2. 2. 7	483	3. 7. 23	518	2. 7. 37
449	. . .	484	2. 2. 11. 11	519	3. 173
450	2. 3. 3. 5. 5	485	5. 97	520	2. 2. 2. 5. 3
451	11. 41	486	2. 3. 3. 3. 3. 3	521	. . .
452	2. 2. 113	487	. . .	522	2. 3. 3. 29
453	3. 151	488	2. 2. 2. 61	523	. . .
454	2. 227	489	3. 163	524	2. 2. 131
455	5. 7. 13	490	2. 5. 7. 7	525	3. 5. 5. 7

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
316	2. 2. 79	351	3. 3. 3. 13	386	2. 193
317	. . .	352	2. 2. 2. 2. 2. 11	387	3. 3. 43
318	2. 3 53	353	. . .	388	2. 2. 97
319	11. 29	354	2. 3. 59	389	. . .
320	2. 2. 2. 2. 2. 5	355	5. 71	390	2. 3. 5. 13
321	3. 107	356	2. 2. 89	391	17. 23
322	2. 7. 23	357	3. 7. 17	392	2. 2. 2. 7. 7
323	17. 19	358	2. 179	393	3. 131
324	2. 2. 3. 3. 3. 3	359	. . .	394	2. 197
325	5. 5. 13	360	2. 2. 2. 3. 3. 5	395	5. 79
326	2. 163	361	19. 19	396	2. 2. 3. 3. 11
327	3 109	362	2. 181	397	. . .
328	2. 2. 2. 41	363	3. 11. 11	398	2. 199
329	7. 47.	364	2. 2. 7. 13	399	3. 7. 19
330	2. 3. 5. 11	365	5. 73	400	2. 2. 2. 2. 5. 5
331	. . .	366	3. 2. 61	401	. . .
332	2. 2. 83	367	. . .	402	2. 3. 67
333	3. 3 37	368	2. 2. 2. 2. 23	403	13. 31
334	2. 167	369	3. 3 41	404	2. 2. 101
335	5. 67	370	2. 5. 37	405	3. 3. 3. 3. 5
336	2. 2. 2. 2. 3. 7	371	7. 53	406	2. 7. 29
337	. . .	372	2. 2 3. 31	407	11. 37
338	2. 13. 13	373	. . .	408	2. 2. 2. 3. 17
339	3. 113	374	2. 11. 17	409	. . .
340	2. 2. 5. 17	375	3 5. 5. 5	410	2. 5. 41
341	11. 31	376	2. 2. 2. 47	411	3. 137
342	2. 3. 3. 19	377	13. 29	412	2. 2. 103
343	7. 7. 7.	378	2. 3. 3. 3. 7	413	7. 59
344	2. 2. 2. 43	379	. . .	414	2. 3. 3. 23
345	3. 5. 23	380	2. 2. 5. 19	415	5. 83
346	2. 173	381	3. 127	416	2. 2. 2. 2. 2. 13
347	. . .	382	2. 191	417	3. 139
348	2. 2. 3. 29	383	. . .	418	2. 11. 19
349	. . .	384	2. 2. 2. 2. 3. 2. 2. 3	419	. . .
350	2. 5. 5. 7	385	5. 7. 11	420	2. 2. 3. 5. 7

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
421	. . .	456	2. 2. 2. 3. 19	491	. . .
422	2. 211	457	. . .	492	2. 2. 3. 41
423	3. 3. 47	458	2. 229	493	17. 29
424	2. 2. 53	459	3. 3. 3. 17	494	2. 13. 19
425	5. 5. 17	460	2. 2. 5. 23	495	3. 3. 5. 11
426	2. 3. 71	461	. . .	496	2. 2. 2. 2. 31
427	7. 61	462	2. 3. 7. 11	497	7. 71
428	2. 2. 107	463	. . .	498	2. 3. 83
429	3. 11. 13	464	2. 2. 2. 2. 29	499	. . .
430	2. 5. 43	465	3. 5. 31	500	2. 2. 5. 5. 5
431	. . .	466	2. 233	501	3. 167
432	2. 2. 2. 2. 3. 3. 3	467	. . .	502	2. 251
433	. . .	468	2. 2. 3. 3. 13	503	. . .
434	2. 7. 31	469	7. 67	504	2. 2. 2. 7. 9
435	2. 5. 29	470	2. 5. 47	505	5. 101
436	2. 2. 109	471	3. 157	506	2. 11. 23
437	19. 23	472	2. 2. 2. 59	507	3. 13. 13
438	2. 3. 73	473	11. 43	508	2. 2. 127
439	. . .	474	2. 3. 79	509	. . .
440	2. 2. 2. 5. 11	475	5. 5. 19	510	2. 3. 5. 17
441	3. 3. 7. 7.	476	2. 2. 7. 17	511	7. 73
442	2. 13. 17	477	3. 3. 53	512	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2
443	. . .	478	2. 239	513	3. 3. 3. 19
444	2. 2. 3. 37	479	. . .	514	2. 257
445	5. 89	480	2. 2. 2. 2. 2. 3. 5	515	5. 103
446	2. 223	481	13. 37	516	2. 2. 3. 43
447	3, 149	482	2. 241	517	11. 47
448	2. 2. 2. 2. 2. 2. 7	483	3. 7. 23	518	2. 7. 37
449	. . .	484	2. 2. 11. 11	519	3. 173
450	2. 3. 3. 5. 5	485	5. 97	520	2. 2. 2. 5. 3
451	11. 41	486	2. 3. 3. 3. 3. 3	521	. . .
452	2. 2. 113	487	. . .	522	2. 3. 3. 29
453	3. 151	488	2. 2. 2. 61	523	. . .
454	2. 227	489	3. 163	524	2. 2. 131
455	5. 7. 13	490	2. 5. 7. 7	525	3. 5. 5. 7

N.	Elem.
526	2. 263
527	17. 31
528	2. 2. 2. 2. 3. 11
529	23. 23
530	2. 5. 53
531	3. 3. 59
532	2. 2. 7. 19.
533	13. 41
534	2. 3. 89
535	5. 107
536	2. 2. 2. 67
537	3. 179
538	2. 269
539	7. 7. 11
540	2. 2. 3. 3. 3. 5.
541	. . .
542	2. 271
543	3. 181
544	2. 2. 2. 2. 2. 17
545	5. 109
546	2. 3. 7. 13
547	. . .
548	2. 2. 137
549	3. 3. 61
550	2. 5. 5. 11
551	19. 29
552	2. 2. 2. 3. 23
553	7. 79
554	2. 277
555	5. 3. 37
556	2. 2. 139
557	. . . .
558	2. 3. 3. 31
559	13. 43
560	2. 2. 2. 2. 5. 7
561	3. 11. 17
562	2. 281
563	. . .
564	2. 2. 3. 47
565	5. 113
566	2. 283
567	3. 3. 3. 3. 7
568	2. 2. 2. 71
569	. . .
570	2. 3. 5. 19
571	. . .
572	2. 2. 11. 13
573	3. 191
574	2. 7. 41
575	5. 5. 23
576	2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3
577	. . .
578	2. 17. 17
579	3. 193
580	2. 2. 5. 29
581	7. 83
582	2. 3. 97
583	11. 53
584	2. 2. 2. 73
585	3. 3. 5. 13

N.	Elem.
586	2. 293
587	. . .
588	2. 2. 3. 7. 7.
589	19. 31
590	2. 5. 59
591	3. 197
592	2. 2. 2. 2. 37
593	. . .
594	2. 3. 3. 3. 11
595	5. 7. 17
596	2. 2. 149
597	3. 199
598	2. 13. 23
599	. . ,
600	2. 2. 2. 3. 5. 5
601	. . .
602	2. 7. 43
603	3. 3. 67
604	2. 2. 151
605	5. 11. 11
606	2. 3. 101
607	. . .
608	2. 2. 2. 2. 2. 19
609	3. 7. 29
610	2. 5. 61
611	13. 47
612	2. 2. 3. 3. 17
613	. . .
614	2. 307
615	3. 5. 41
616	2. 2. 2. 7. 11
617	. . .
618	2. 3. 103
619	. . .
620	2. 2. 5. 31

N.	Elem.
621	3. 3. 3. 23
622	2. 311
623	7. 89
624	2. 2. 2. 2. 3. 13
625	5. 5. 5. 5.
626	2. 313
627	3. 11. 19
628	2. 2. 157
629	17. 37
630	2. 3. 3. 5. 7
631	. . .
632	2. 2. 2. 79
633	3. 211
634	2. 317
635	5. 127
636	2. 2. 3. 53
637	7. 7. 13
638	2. 11. 29
639	3. 3. 71
640	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 5
641	. . .
642	2. 3. 107
643	. . .
644	2. 2. 7. 23
645	3. 5. 43
646	2. 17. 19
647	. . .
648	2. 2. 2. 3. 3. 3. 3
649	11. 59.
650	2. 5. 5. 13
651	3. 7. 31
652	2. 2. 163
653	. . .
654	2. 3. 109
655	5. 131

N.	Elem.
656	2. 2. 2. 2. 41
657	3. 3. 73
658	2. 7. 47
659	. . .
660	2. 2. 3. 5. 11
661	. . .
662	2. 331
663	3. 13. 17
664	2. 2. 2. 83
665	5. 7. 19
666	2. 3. 3. 37
667	23. 29
668	2. 2. 167
669	3. 223
670	2. 5. 67
671	11. 67
672	2. 2. 2. 2. 2. 3. 7
673	. . .
674	2. 337.
675	3. 3. 3. 5. 5
676	2. 2. 13. 13
677	. . .
678	2. 3. 113
679	7. 97
680	2. 2. 2. 5. 7
681	3. 227
682	2. 11. 31
683	. . .
684	2. 2. 3. 3. 19
685	5. 137
686	2. 7. 7. 7
687	3. 229
688	2. 2. 2. 2. 43
689	13. 53
690	2. 3. 5. 23
691	. . .
692	2. 2. 173
693	3. 3. 7. 11
694	2. 347
695	5. 139
696	2. 2. 2. 3. 29
697	17. 41
698	2. 349
699	3. 233
700	2. 2. 5. 5. 7
701	. . .
702	2. 3. 3. 3. 13
703	19 37
704	2. 2. 2. 2. 2. 2. 11
705	3. 5. 47
706	2. 353
707	7. 101
708	2. 2. 3. 59
709	.
710	2. 5. 71.
711	3. 3. 79
712	2. 2. 2. 89
713	23. 31
714	2. 3. 7. 17
715	5. 11. 13
716	2. 2. 179
717	3. 239
718	2. 359
719	. . .
720	2. 2. 2. 2. 3. 3. 5
721	7. 103
722	2. 19. 19
723	3. 241
724	2. 2. 181
725	5. 5. 29

N.	Elem.
726	2. 3. 11. 11
727	. . .
728	2. 2. 2. 7. 13
729	3. 3. 3. 3. 3. 3
730	2. 5. 73
731	17. 37
732	2. 2. 3. 61
733	. . .
734	2. 367
735	3. 5. 7. 7
736	2. 2. 2. 2. 2. 23
737	11. 67
738	2. 3. 3. 41
739	. . .
740	2. 2. 5. 37
741	3. 13. 19
742	2. 7. 53
743	. . .
744	2. 2. 2. 3. 31
745	5. 149
746	2. 373
747	3. 3. 83
748	2. 2. 11. 17
749	7. 107
750	2. 3. 5. 5. 5.
751	. . .
752	2. 2. 2. 2, 47
753	3. 251
754	2. 13. 29
755	5. 151
756	2. 2. 3. 3. 3. 7
757	. . .
758	2. 379
759	3. 11. 13
760	2. 2. 2. 5. 19
761	. . . .
762	2. 3. 127
763	7. 109
764	2. 2. 191
765	3. 3. 5. 17
766	2. 383
767	13. 59
768	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 3
769	. . .
770	2. 5. 7. 11.
771	3. 257
772	2. 2. 193
773	. . .
774	2. 3. 3. 43
775	5. 5. 31
776	2. 2. 2. 97
777	3. 7. 37
778	2. 389
779	19. 41
780	2. 2. 3. 5. 13
781	11. 71
782	2. 17. 23
783	3. 3. 3. 29
784	2. 2. 2. 2. 7. 7
785	5. 157
786	2. 3. 131
787	. . .
788	2. 2. 197
789	3. 263
790	2. 5. 79
791	7. 113
792	2. 2. 2. 3. 3. 11
793	13. 61
794	2. 397
795	3. 5. 53

N.	Elem.
796	2. 2. 199
797	. . .
798	2. 3. 7. 19
799	17. 47
800	2. 2. 2. 2. 2. 5. 5
801	3. 3. 89
802	2. 401
803	11. 73
804	2. 2. 3. 67
805	5. 7. 23
806	2. 13. 13
807	3. 269
808	2. 2. 2. 101
809	. . .
810	2. 3. 3. 3. 3. 5
811	. . .
812	2. 2. 7. 29
813	3. 271.
814	2. 11. 37
815	5. 163
816	2. 2. 2. 2. 3. 17
817	19. 43
818	2. 409
819	3. 3. 7. 13
820	2. 2. 5. 41
821	. . .
822	2. 3. 137
823	. . .
824	2. 2. 2. 103
825	3. 5. 5. 11
826	2. 7. 59
827	. . .
828	2. 2. 3. 3. 23
829	. . .
830	2. 5. 83

N.	Elem.
831	3. 277
832	2. 2. 2. 2. 2. 2. 13
833	7. 7. 17
834	2. 3. 139
835	5. 167
836	2. 2. 11. 19
837	3. 3. 3. 31
838	2. 419
839	. . .
840	2. 2. 2. 3. 5. 7
841	29. 29
842	2. 421
843	3. 281
844	2. 2. 211
845	5. 13. 13
846	2. 3. 3. 47
847	7. 11. 11
848	2. 2. 2. 2. 53
849	3. 283
850	2. 5. 5. 17
851	23. 37
852	2. 2. 3. 71
853	. . .
854	2. 7. 61
855	3. 3. 5. 19
856	2. 2. 2. 107
857	. . .
858	2. 3. 11. 13
859	. . .
860	2. 2. 5. 43
861	3. 7. 41
862	2. 431
863	. . .
864	2. 2. 2. 2. 2. 3. 3. 3
865	5. 173

N.	Elem.
866	2. 433
867	3. 17. 17
868	2. 2. 7. 31
869	11. 79
870	2. 3. 5 29
871	. . .
872	2. 2. 2. 109
873	3. 3. 97
874	2. 19. 23
875	5. 5. 5. 7
876	2. 2. 3. 73
877	. . .
878	2. 439
879	3. 293
880	2. 2. 2. 2. 5. 11
881	. . .
882	2. 3. 3. 7. 7.
883	. . .
884	2. 2. 13. 17
885	3. 5. 59
886	2. 443
887	. . .
888	2. 2. 2. 3. 37
889	7. 127
890	2. 5. 89
891	3. 3. 3. 3. 11
892	2. 2. 223
893	19. 47
894	2. 3. 149
895	5. 179
896	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 7
897	3. 13. 23
898	2. 449
899	29. 31
900	2. 2. 3. 3. 5. 5.

N.	Elem.
901	17. 53
902	2. 11. 41
903	3. 7. 43
904	2. 2. 2. 113
905	5. 181
906	2. 3. 151
907	. . .
908	2. 2. 227
909	3. 3. 101
910	2. 5. 7. 13
911	. . .
912	2. 2. 2. 2. 3. 19
913	11. 83
914	2. 457
915	3. 5. 61
916	2. 2. 229
917	7. 131
918	2. 3. 3. 3. 17
919	. . .
920	2. 2. 2. 5. 23
921	3. 307
922	2. 461
923	13. 71
924	2. 2. 3. 7. 11
925	5. 5. 37
926	2. 463
927	3. 3. 103
928	2. 2. 2. 2. 2. 29
929	. . .
930	2. 3. 5. 31
931	7. 7. 19
932	2. 2. 233
933	3. 311
934	2. 467
935	5. 11. 17

N.	Elem.
936	2. 2. 2. 3. 3. 13
937	. . .
938	2. 7. 67
939	3. 313
940	2. 2. 5 47
941	. . .
942	2. 3. 157
943	23. 41
944	2. 2. 2. 2. 59
945	3. 3. 3. 5. 7
946	2. 11. 43
947	. . .
948	2. 2. 3. 79
949	13. 73
950	2. 5. 5. 19.
951	3. 317
952	2. 2. 2. 7. 17
953	. . .
954	2. 3. 3. 53
955	5. 191
956	2. 2. 239
957	3. 11. 29
958	2. 479
959	7. 137
960	2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. 5
961	31. 31
962	2. 13. 37
963	3. 3. 107
964	2. 2. 241
965	5. 193
966	2. 3. 7. 23
967	. . .
968	2. 2. 2. 11. 11
969	3. 19. 17
970	2. 5. 97
971	. . .
972	2. 2. 3. 3. 3. 3. 3
973	7. 139
974	2. 487
975	3. 5. 5. 13
976	2. 2. 2. 2. 61
977	. . .
978	2. 3. 163
979	11. 89
980	2. 2. 5 7. 7
981	3. 3. 109
982	2. 491
983	. . .
984	2. 2. 2. 3. 41
985	5. 197
986	2. 17. 29
987	3. 7. 47
988	2. 2. 13. 19
989	23. 43
990	2. 3. 3. 5. 11
991	. . .
992	2. 2. 2. 2. 2. 31
993	3. 331
994	2. 7. 71.
995	5. 199
996	2. 2. 3. 83
997	. . .
998	2. 499
999	3. 3. 3. 37
1000	2. 2. 2. 5. 5. 5

Der kürtze halber werden forthin die graden, und deren Collect in 3 aufgehet, desgleichen die sich in 5 endigen, ausgelassen, weil ieder gleich siehet, daß sie mit 2, 3, und 5 divisib. (§. 396.)

N.	Elem.
1001	7. 11. 13
1003	17. 59
1007	19. 53
1009	. . .
1013	. . .
1019	. . .
1021	. . .
1027	13. 79
1031	. . .
1033	. . .
1037	17. 61
1039	. . .
1043	7. 149
1049	. . .
1051	. . .
1057	7. 151.
1061	. . .
1063	. . .
1067	11. 97
1069	. . .
1073	29. 37
1079	13. 83
1081	23. 47
1087	. . .
1091	. . .
1093	. . .
1097	. . .
1099	7. 157
1103	. . .
1109	. . .
1111	11. 101
1117	. . .
1121	19. 59
1123	. . .
1127	7. 7. 23

N.	Elem.
1029	. . .
1133	11. 103
1139	17. 67
1141	7. 163
1147	31. 37
1151	. . .
1153	. . .
1157	13. 89
1159	19. 61
1163	. . .
1169	7. 161
1171	. . .
1177	11. 107
1181	. . .
1183	7. 13. 13
1187	. . .
1189	29. 41
1193	. . .
1199	11. 109
1201	. . .
1207	17. 71
1211	7. 173
1213	. . .
1217	. . .
1219	23. 53
1223	. . .
1229	. . .
1231	. . .
1237	. . .
1241	17. 73
1243	11. 113
1247	29. 43
1249	. . .
1253	7. 179
1259	. . .

N.	Elem.
1261	13. 97
1267	7. 181
1271	41. 31
1273	19. 67
1277	. . .
1279	. . .
1283	. . .
1291	. . .
1297	. . .
1301	. . .
1303	. . .
1307	. . .
1309	11. 119
1313	13. 101
1319	. . .
1321	. . .
1327	. . .
1331	11. 11. 11
1333	31. 43
1337	7. 191
1339	13. 103
1343	17. 79
1349	19. 71
1351	7. 193
1357	33 59.
1361	. . .
1363	29. 47
1367	. . .
1369	37. 37
1373	. . .
1379	7. 197
1381	. . .
1387	19. 73
1391	13. 107
1393	7. 199

N.	Elem.
1397	11. 127
1399	. . .
1403	23. 61
1409	. . .
1411	17. 83
1417	13. 109
1421	7. 7. 29
1423	. . .
1427	. . .
1429	. . .
1433	. . .
1439	. . .
1441	11. 131
1447	. . .
1451	. . .
1453	. . .
1457	31. 47
1459	. . .
1463	7. 11. 19
1469	13. 113
1471	. . .
1477	7. 211
1481	. . .
1483	. . .
1487	. . .
1489	. . .
1493	. . .
1499	. . .
1501	19. 79
1507	11. 137
1511	. . .
1513	17. 89
1517	37. 41
1519	7. 7. 31
1523	. . .

N.	Elem.
1529	11. 139
1531	. . .
1537	29. 53
1541	23. 67
1543	. . .
1547	7. 13. 17
1549	. . .
1553	. . .
1559	. . .
1561	7. 223
1567	. . .
1571	. . .
1573	11. 11. 13.
1577	19. 83
1579	. . .
1583	. . . .
1589	7. 227
1591	. . .
1597	. . .
1601	. . . .
1603	7. 229
1607	. . . .
1609	. . . .
1613	. . .
1619	. . .
1621	. . .
1627	. . .
1631	7. 233
1633	23. 71
1637	. . .
1639	11. 149
1643	31. 53
1649	17. 97
1651	13. 127
1657	. . .

N.	Elem.
1661	11. 151
1663	. . .
1667	. . .
1669	. . .
1673	7. 239
1679	23. 73
1681	41. 41
1687	7. 241
1691	19. 89
1693	. . .
1697	. . .
1699	. . .
1703	13. 131
1709	. . .
1711	29. 59
1717	17. 101
1721	. . .
1723	. . .
1727	11. 157
1729	7. 13. 19
1733	. . .
1739	37. 47
1741	. . .
1747	. . .
1751	17. 103
1753	. . .
1757	7. 251
1759	. . .
1763	41. 43
1769	29. 61
1771	7. 11. 23
1777	. . .
1781	13. 137
1783	. . .
1787	. . .

N.	Elem.
1789	. . .
1793	11. 163
1799	7. 257
1801	. . .
1807	13. 139
1811	. . .
1813	7. 7. 37
1817	23. 79
1819	17. 107
1823	. . .
1829	31. 59
1831	. . .
1837	11. 167
1841	7. 263
1843	19. 97
1847	. . .
1849	43. 43
1853	17. 109
1859	11. 13. 13
1861	. . .
1867	. . .
1871	. . .
1873	. . .
1877	. . .
1879	. . .
1883	7. 269
1889	. . .
1891	31. 61
1893	11. 163
1897	7. 271
1901	. . .
1903	11. 173
1907	. . .
1909	23. 83
1913	. . .

N.	Elem.
1919	19. 101
1921	17. 113
1927	41. 47
1931	. . .
1933	. . .
1937	13. 149
1939	7. 277
1943	29. 67
1949	. . .
1951	. . .
1957	19. 103
1961	37. 53
1963	13. 151
1967	7. 281
1969	11. 179
1973	. . .
1979	. . .
1981	7. 283
1987	. . .
1991	11. 181
1993	. . .
1997	. . .
1999	. . .
2003	. . .
2009	7. 7. 41
2011	. . .
2017	. . .
2021	43. 47
2023	7. 17. 17
2027	. . .
2029	. . .
2033	19. 107
2039	. . .
2041	13. 157
2047	23. 89
2051	7. 293
2053	. . .
2057	11. 11. 17
2059	29. 71
2063	. . .
2069	. . .
2071	19. 109
2077	31. 67
2081	. . .
2083	. . .
2087	. . .
2089	. . .
2093	7. 13. 23
2099	. . .
2101	11. 191
2107	7. 7. 43
2111	. . .
2113	. . .
2117	29. 73
2119	13. 163
2123	11. 193
2129	. . .
2131	. . .
2137	. . .
2141	. . .
2143	. . .
2147	19. 113
2149	7. 307
2153	. . .
2159	17. 127
2161	. . .
2167	11. 197
2171	13. 167
2173	41. 53
2177	7. 311
2179	. . .
2183	37. 59
2189	11. 199
2191	7. 313
2197	13 13. 13
2201	31. 71
2203	. . .
2207	. . .
2209	47. 47
2213	. . .
2219	7. 317
2221	. . .
2227	17. 131
2233	7. 11. 29
2237	. . .
2239	. . .
2243	. . .
2249	13. 173
2251	. . .
2257	37. 61
2261	7. 17. 19
2263	31. 73
2267	. . .
2269	. . .
2273	. . .
2279	43. 53
2281	. . .
2287	. . .
2291	29. 79
2293	. . .
2297	. . .
2299	11. 11. 19
2303	7. 7. 47
2309	. . .
2311	. . .

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
2317	7. 331	3447	. . .	2579	. . .
2321	11. 211	2449	31. 79	2581	29. 89
2323	23. 101	2453	11. 223	2587	13. 199
2327	13. 179	2459	. . .	2591	. . .
2329	17. 137	2461	23. 107	2593	. . .
2333	. . .	2467	. . . .	2597	7. 7. 53
2339	. . .	2471	7. 353	2599	23. 113
2341	. . .	2473	. . . .	2603	19. 137
2347	. . .	2477	. . .	2609	. . .
2351	. . .	2479	37. 67	2611	7. 373
2353	13. 181	2483	13. 191	2617	. . .
2357	. . .	2489	19. 131	2621	. . .
2359	7. 337	2491	47. 53	2623	43. 61
2363	17. 139	2497	11. 227	2627	37. 71
2369	23. 103	2501	41. 61	2629	11. 239
2371	. . .	2503	. . .	2633	. . .
2377	. . .	2507	23. 109	2639	7. 13. 29
2381	. . .	2509	13. 193	2641	19. 139
2383	. . .	2513	7. 359	2647	. . .
2387	7. 11. 31	2519	11. 229	2651	11. 241
2389	. . .	2521	. . .	2653	7. 379
2393	. . .	2527	7. 19. 19	2657	. . .
2399	. . .	2531	. . .	2659	. . .
2401	7. 7. 7. 7	2533	17. 149	2663	. . .
2407	29. 83	2537	43. 59	2669	17. 157
2411	. . .	2539	. . .	2671	. . .
2413	19. 127	2543	. . .	2677	. . .
2417	. . .	2549	. . .	2681	7. 383
2419	41. 59	2551	. . .	2683	. . .
2423	. . .	2557	. . .	2687	. . .
2429	7. 347	3561	13. 197	2289	. . .
2431	11. 13. 17	2563	11. 233	2693	. . .
2437	. . .	2567	17. 151	2699	. . .
2441	. . .	2569	7. 367	2701	37. 73
2443	7. 349	2573	31. 83	2707	. . .

N.	Elem.
2711	. . .
2713	. . .
2717	11. 13. 19
2719	. . .
2723	7. 389
2729	. . .
2731	. . .
2737	7. 17. 23
2741	. . .
2743	13. 211
2747	41. 67
2749	. . .
2753	. . .
2759	31. 89
2761	11. 251
2767	. . .
2771	17. 163
2773	47. 59
2777	. . .
2779	7. 397
2783	11. 11. 23
2789	. . .
2791	. . .
2797	. . .
2801	. . .
2803	. . .
2807	7. 401
2809	53. 53
2813	29. 97
2819	. . .
2821	7. 13. 31
2827	11. 257
2831	19. 149
2833	. . .
2837	. . .
2839	17. 167
2843	. . .
2849	7. 11. 37
2851	. . .
2857	. . .
2861	. . .
2863	7. 409
2867	47. 61
2869	19. 151
2873	13. 13. 17
2879	. . .
2881	43. 67
2887	. . .
2891	7. 7. 59
2893	11. 263
2897	. . .
2899	13. 223
2903	. . .
2909	. . .
2911	41. 71
2917	. . .
2921	23. 127
2923	37. 79
2927	. . .
2929	29. 101
2933	7. 419
2939	. . .
2941	17. 173
2947	7. 421
2951	13. 227
2953	. . .
2957	. . .
2959	11. 269
2963	. . .
2969	. . .
2971	. . .
2977	13. 219
2981	11. 271
2983	19. 157
2987	29. 103
2989	7. 7. 61
2993	41. 73
2999	. . .
3001	. . .
3011	. . .
3013	23. 131
3017	7. 431
3019	. .
3023	. .
3629	13. 233
3031	7. 433
3037	. .
3041	. .
3043	17. 179
3047	11. 277
3049	. .
3053	43. 71
3059	7. 19. 23
3061	. .
3067	. .
3073	7. 439
3077	17. 181
3079	. .
3083	. .
3089	. .
3091	11. 281
3097	19. 163
3101	7. 443
3103	29. 107
3107	13. 239
3109	. . 3113

N.	Elem.
3113	11. 283
3119	. .
3121	. .
3127	53. 59
3131	31. 101
3133	13. 241
3137	. .
3139	43. 73
3143	7. 449
3149	47. 67
3151	23. 137
3157	7. 11. 41
3161	19. 109
3163	. .
3167	. .
3169	. .
3173	19. 167
3179	11. 17. 17
3181	. .
3187	. .
3191	. .
3193	31. 103
3197	23. 139
3199	7. 457
3203	. .
3209	. .
3211	13. 13. 19
3217	. .
3221	. .
3223	11. 293
3227	7. 461
3229	. .
3233	53. 61
3239	41. 79
3241	7. 463
3247	17. 191
3251	. . .
3253	. . .
3257	. . .
3259	. . .
3263	13. 251
3269	7. 467
3271	. . .
3277	29. 113
3281	17. 193
3283	7. 7. 67
3287	19. 173
3289	11. 13. 23
3293	37. 89
3299	. . .
3301	. . .
3307	. . .
3311	7. 11. 43
3313	. . .
3317	31. 107
3319	. . .
3323	. . .
3329	. . .
3331	. . .
3337	47. 71
3341	13. 257
3343	. . .
3347	. . .
3349	17. 197
3353	7. 479
3359	. . .
3361	. . .
3367	7. 13. 37
3371	. . .
3373	. . .
3377	11. 307
3379	31. 109
3383	17. 199
3389	. . .
3391	. . .
3397	43. 79
3401	19. 179
3403	41. 83
3407	. . .
3409	7. 487
3413	. . .
3419	19. 263
3421	11. 311
3427	13. 149
3431	47. 73
3433	. . .
3437	7. 491
3439	19. 181
3443	11. 313
3449	. .
3451	7. 17. 29
3457	. . . .
3461	. .
3463	. . .
3467	. . .
3469	. . .
3473	23. 151
3479	7. 7. 71
3481	59. 59
3487	11. 317
3491	. . .
3497	13. 269
3499	. . .
3503	31. 113
3509	11. 11. 29
3511	. . .
3517	. . .

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
3521	7. 505	3649	41. 89	3787	7. 541
3523	13. 271	3653	13. 281	3791	17. 223
3527	. .	3659	. . .	3793	. .
3529	. .	3667	19. 193	3797	. .
3533	. .	3671	. .	3799	29. 191
3539	. .	3673	. .	3803	. .
3541	. . .	3677	. .	3809	13. 293
5547	. . .	3679	13. 283	3811	37. 103
3551	53. 67	3683	19. 127	3817	11. 347
3553	11. 17. 19	3689	7. 17. 31	3821	. .
3557	. . .	3691	. .	3823	. .
3559	. . .	3697	. .	3827	43. 89
3563	7. 509	3701	. .	3829	7. 547
3569	43. 83	3703	7. 23. 23	3833	. .
3571	. .	3707	11. 337	3839	11. 349
3577	7. 7. 73	3709	. .	3841	23. 167
3581	. .	3713	47. 79	3847	. .
3583	. .	3719	. .	3851	. .
3587	17. 211	3721	61. 61	3853	. .
3589	37. 97	3727	. .	3857	7. 19. 29
3593	. .	3731	7. 13. 41	3859	17. 227
3599	59. 61	3733	. .	3863	. .
3601	13. 277	3737	37. 101	3869	53. 73
3607	. .	3739	. .	3871	7. 7. 79
3611	23. 157	3743	19. 197	3877	. .
3613	. . .	3747	3. 1249	3881	. .
3617	. . .	3751	11. 11. 31	3883	11. 353
3619	7. 11. 47	3757	13. 17. 17	3887	13. 13. 23
3623	. . .	3761	. .	3889	. .
3629	19. 191	3763	53. 71	3893	17. 229
3631	. . .	3767	. .	3899	7. 557
3637	. . .	3769	. .	3901	47. 83
3641	11. 331	3773	7. 7. 7. 11	3907	. .
3643	. . .	3779	. .	3911	. .
3647	7. 521	3781	19. 199	3913	7. 13. 43

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
3917	. . .	4049	. .	4181	37. 113
3919	. . .	4051	. .	4183	47. 89
3923	. .	4057	. .	4187	53. 79
3929	. .	4061	31. 131	4189	59. 71
3931	. . .	4063	17. 239	4193	7. 599
3937	31. 127	4067	7. 7. 83	4199	13. 17. 19
3941	7. 563	4069	13. 313	4201	. .
3943	. .	4073	. .	4207	7. 601
3947	. .	4079	. .	4211	. .
3949	11. 359	4081	7. 11. 53	4213	11. 383
3953	59. 67	4087	61. 67	4217	. .
3959	37. 107	4091	. .	4219	. .
3961	17. 233	4093	. .	4223	41. 103
3967	. .	4097	17. 241	4229	. .
3971	11. 19. 19	4099	. .	4231	. .
3973	29. 137	4103	11. 373	4237	19. 223
3977	41. 97	4109	7. 587	4241	. .
3979	23. 173	4111	. .	4243	. .
3983	7. 569	4117	23. 179.	4247	31. 137
3989	. . .	4121	13. 317	4249	7. 607
3991	13. 307	4123	7. 19. 31	4253	. .
3997	7. 571	4127	. .	4259	. .
4001	. . .	4129	. .	4261	. .
4003	. . .	4133	. .	4267	17. 251
4007	. . .	4139	. .	4271	. .
4009	19. 211	4141	41. 101	4273	. .
4013	. . .	4147	11. 13. 29	4277	7. 13. 47
4019	. . .	4151	7. 593	4279	11. 389
4021	. . .	4153	. .	4283	. .
4027	. . .	4157	. .	4289	. .
4031	29. 139	4159	. .	4291	7. 613
4033	37. 109	4163	23. 181	4297	. .
4037	11. 367	4169	11. 379	4301	11. 17. 23
4039	7. 577	4171	43. 97	4303	13. 331
4043	13. 311	4177	. .	4307	59. 73

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
4309	31. 139	4451	. .	4577	23. 199
4313	19. 227	4453	61. 73	4579	19. 241
4319	7. 617	4457	. .	4583	. . .
4321	29. 149	4459	7^3. 13	4589	13. 353
4327	. .	4463	. .	4591	. . .
4331	61. 71	4469	41. 109	4597	. . .
4333	7. 619	4471	17. 263	4601	43. 107
4337	. .	4477	11. 11. 37	4603	. . .
4339	. .	4481	. . .	4607	17. 271
4343	43. 101	4483	. . .	4609	11. 419
4349	. .	4487	7. 641	4613	7. 659
4351	19. 229	4489	67. 67	4619	31. 149
4357	. .	4493	. . .	4621	. . .
4361	7. 7. 89	4499	11. 409	4627	7. 661
4363	. .	4501	7. 643	4631	11. 421
4367	11. 397	4503	7. 17. 37	4633	41. 113
4369	17. 257	4507	. . .	4637	. . .
4373	. . .	4511	13. 347	4639	. . .
4379	29. 151	4513	. . .	4643	. . .
4381	13. 337	4517	. . .	4649	. . .
4387	41. 107	4519	. . .	4651	. . .
4391	. .	4523	. . .	4657	. . .
4393	23. 191	4529	7. 647	4661	59. 79
4397	. .	4531	23. 197	4663	. . .
4399	53. 83	4537	13. 349	4667	13. 359
4403	7. 17. 37	4541	19. 239	4669	7. 23. 29
4409	. .	4543	7. 11. 59	4673	. . .
4411	11. 401	4547	. . .	4679	. . .
4421	. .	4549	. . .	4681	31. 151
4423	. .	4553	29. 157	4687	43. 109
4427	19. 233.	4559	47. 97	7691	. . .
4429	43. 103	4561	. . .	4693	13. 19. 19
4433	11. 13 31	4567	. . .	4697	7. 11. 61
4439	23. 193	4571	7. 653	4699	37. 127
4441	. .	4573	17. 269	4703	. . .
4447	. .				

N.	Elem.
4707	11. 19. 23
4709	17. 277
4711	7. 673
4717	53. 89
4721	. . .
4723	. . .
4727	29. 163
4729	. . .
4733	. . .
4739	7. 677
4741	11. 431
4747	47. 101
4751	. . .
4753	7. 7. 97
4757	67. 71
4759	. . .
4763	11. 433
4769	19. 251
4771	13. 367
4777	17. 281
4781	7. 683
4783	. . .
4787	. . .
4789	. . .
4793	. . .
4799	. . .
4801	. . .
4807	11. 19. 23
4811	17. 283
4813	. . .
4817	. . .
4819	61. 79
4823	7. 13. 53
4829	11. 439
4831	. . .
4837	7. 691
4841	47. 103
4843	29. 167
4847	37. 131
4853	23. 211
4859	43. 113
4861	. . .
4867	31. 157
4871	. . .
4873	11. 443
4877	. . .
4879	7. 17. 41
4883	19. 257
4889	. . .
4891	67. 73.
4897	59. 83
4901	13. 13. 29
4903	. . .
4907	7. 701
4909	. . .
4913	17. 17. 17
4919	. . .
4921	7. 19. 37
4927	13. 379
4931	. . .
4933	. . .
4937	. . .
4939	11. 449
4943	. . .
4949	7. 7. 101
4951	. . .
4957	. . .
4961	11. 11. 41
4963	7. 709
4967	. . .
4969	. . .
4973	. . .
4979	13. 383
4981	17. 293
4987	. . .
4991	7. 23. 31
4993	. . .
4997	19. 263
4999	. . .
5003	. . .
5009	. . .
5011	. . .
5017	29. 173
5021	. . .
5023	. . .
5027	11. 457
5029	47. 107
5033	7. 719
5039	. . .
5041	71. 71
5047	7. 7. 103
5051	. . .
5053	31. 163
5057	13. 389
5059	. . .
5063	61. 83
5069	37. 137
5071	11. 461
5077	. . .
5081	. . .
5083	13. 17. 23
5087	. . .
5089	7. 727
5093	11. 463
5099	. . .

N.	Elem.
5101	. . .
5107	. . .
5111	19. 269
5113	. . .
5117	7. 17. 43
5119	. . .
5123	47. 109
5129	23. 223
5131	7. 733
5137	11. 467
5143	37. 139
5147	. . .
5149	19. 271
5153	. . .
5159	7. 11. 67
5161	13. 397
5167	. . .
5171	. . .
5173	7. 739
5177	31. 167
5179	. . .
5183	71. 73
5189	. . .
5191	29. 179
5197	. . .
5201	7. 743
5203	11. 11. 43
5207	41. 127
5209	. . .
5213	13. 401
5219	17. 307
5221	23. 227
5227	. . .
5231	. . .
5233	. . .
5237	. . .
5239	13. 13. 31
5243	7. 7. 107
5249	29. 181
5251	59. 89
5257	7. 751
5261	. . .
5263	19. 277
5267	23. 229
5269	11. 479
5273	. . .
5279	. . .
5281	. . .
5287	17. 311
5291	11. 13. 37
5293	67. 79
5297	. . .
5299	7. 757
5303	. . .
5309	. .
5311	47. 113
5317	13. 409
5321	17. 313
5323	. . .
5327	7. 761
5329	73. 73
5333	. . .
5339	19. 281
5341	7. 7. 109
5347	. . .
5351	. . .
5353	53. 101
5357	11. 487
5359	23. 233
5363	31. 173
5369	7. 13. 59
5371	41. 131
5377	19. 283
5381	. . .
5383	7. 769
5387	. . .
5389	17. 317
5393	. . .
5399	. . .
5401	11. 491
5407	. . .
5411	7. 773
5413	. . .
5417	. . .
5419	. . .
5423	11. 17. 19
5429	61. 89
5431	. . .
5437	. . .
5441	. . .
5443	. . .
5447	13. 419
5449	. . .
5453	7. 19. 41
5459	53. 103
5461	43. 127
5467	7. 11. 71
5471	. . .
5473	13. 421
5477	. . .
5479	. . .
5483	. . .
5489	11. 499
5491	17. 17. 19
5497	23. 239
5501	. . .

N.	Elem.
5503	. . .
5507	. . .
5509	7. 787
5513	37. 149
5519	. . .
5521	. . .
5527	. . .
5531	. . .
5533	11. 503
5537	7. 7. 113
5539	29. 191
5543	23. 241
5549	31. 179
5551	7. 13. 61
5557	. . .
5561	67. 83
5563	. . .
5567	19. 293
5569	. . .
5573	. . .
5579	7. 797
5581	. . .
5587	37. 151
5591	. . .
5593	7. 17. 47
5597	29. 193
5599	11. 509
5603	13. 431
5609	71. 79
5611	31. 181
5617	41. 137
5621	7. 11. 73
5623	. . .
5627	17. 331
5629	13. 433
5633	43. 131
5639	. . .
5641	. . .
5647	. . .
5651	. . .
5653	. . .
5657	. . .
5659	. . .
5663	7. 809
5669	. . .
5671	53. 107
5681	13. 19. 23
5683	. . .
5687	11. 11. 47
5689	. . .
5693	. . .
5699	41. 139
5701	. . .
5707	13. 439
5711	. . .
5713	29. 197
5717	. . .
5719	7. 19. 43
5723	59. 97
5729	17. 337
5731	11. 521
5737	. . .
5741	. . .
5743	. . .
5747	7. 821
5749	. . .
5753	11. 523
5759	13. 443
5761	7. 823
5762	7. 43. 67
5767	73. 79
5771	29. 199
5773	23. 251
5777	53. 109
5779	. . .
5783	. . .
5789	7. 827
5791	. . .
5797	11. 17. 31
5801	. . .
5803	7. 829
5807	. . .
5809	37. 157
5813	. . .
5819	11. 23. 23
5821	. . .
5827	. . .
5831	7. 7. 7. 17
5833	19. 307
5837	13. 449
5839	. . .
5843	. . .
5849	. . .
5851	. . .
5857	. . .
5861	. . .
5863	11. 13. 41
5867	. . .
5869	. . .
5873	7. 839
5879	. . .
5881	. . .
5887	7. 29. 29
5891	43. 137
5893	71. 83

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
5897	. . .	6029	. . .	6161	61. 101
5899	7. 347	6931	37. 163	6163	. . .
5903	. . .	6037	. . .	6167	7. 881
5909	19. 311	6041	7. 863	6169	31. 199
5911	23. 257	6043	. . .	6173	. . .
5917	61. 79	6047	. . .	6179	37. 167
5921	31. 191	6049	23. 263	6181	7. 883
5923	. . .	6053	. . .	6187	23. 269
5927	. . .	6059	73. 83	6191	41. 151
5929	7. 7. 11. 11	6061	11. 19. 29	6193	11. 563
5933	17. 349	6067	. . .	6197	. . .
5939	. . .	6071	13. 467	6199	. . .
5941	13. 457	6073	. . .	6203	. . .
5947	19. 313	6077	59. 103	6209	7. 887
5951	11. 541	6079	. . .	6211	. . .
5953	. . .	6083	7. 11. 79	6217	. . .
5957	7. 23. 37	6089	. . .	6221	. . .
5959	59. 101	6091	. . .	6223	7. 7. 127
5963	67. 89	6097	7. 13. 67	6227	13. 479
5969	47. 127	6101	. . .	6229	. . .
5971	7. 853	6103	17. 359	6233	23. 271
5977	43. 139	6107	31. 197	6239	17. 367
5981	. . .	6109	41. 149	6241	79. 79
5983	31. 193	6113	. . .	6247	. . .
5987	. . .	6119	29. 211	6251	7. 19. 47
5989	53. 113	6121	. . .	6253	13. 13. 37
5993	13. 461	6127	11. 557	6257	. . .
5999	7. 857	6131	. . .	6259	11. 569
6001	17. 353	6133	. . .	6263	. . .
6007	. . .	6137	17. 19. 19	6269	. . .
6011	. . .	6139	7. 877	6271	. . .
6013	7. 859	6143	. . .	6277	. . .
6017	11. 547	6149	11. 13. 43	6281	11. 571
6019	13. 463	6151	. . .	6283	61. 103
6023	19. 317	6157	47. 131	6287	. . .

N.	Elem.
6289	19. 331
6293	7. 29. 31
6299	. . .
6301	. . .
6307	7. 17. 53
6311	. . .
6313	59. 107
6317	. . .
6319	71. 89
6323	. . .
6329	. . .
6331	13. 487
6337	. . .
6341	17. 373
6343	. . .
6347	11. 577
6349	7. 907
6353	. . .
6359	. . .
6361	. . .
6367	. . .
6371	23. 277
6373	. . .
6377	7. 911
6379	. . .
6383	13. 491
6389	. . .
6397	. . .
6401	37. 173
6403	19. 337
6407	43. 149
6409	13. 17. 29
6413	11. 11. 53
6419	7. 7. 131
6421	. . .
6427	. . .
6431	59. 109
6433	7. 919
6437	41. 157
6439	47. 137
6443	17. 379
6449	. . .
6451	. . .
6457	11. 587
6461	7. 13. 71
6463	23. 281
6467	29. 223
6469	. . .
6473	. . .
6479	11. 19. 31
6481	. . .
6487	13. 499
6491	. . .
6493	43. 151
6499	67. 97
6503	7. 929
6509	23. 283
6511	17. 383
6517	7. 7. 7. 19
6521	. . .
6523	11. 593
6527	61. 107
6529	. . .
6533	47. 139
6539	13. 503
6541	31. 211
6547	. .
6551	. . .
6553	. . .
6557	79. 83
6559	7. 937
6563	. . .
6569	. . .
6571	. . .
6577	. . .
6581	. . .
6583	29. 227
6587	7. 941
6589	11. 599
6593	19. 347
6599	. . .
6601	7. 23. 41
6607	. . .
6611	11. 601
6613	17. 389
6617	13. 509
6619	. . .
6623	37. 179
6629	7. 947
6631	19. 349
6637	. . .
6641	29. 229
6643	7. 13. 73
6647	17. 17. 23
6649	61. 109
6653	. . .
6659	. . .
6661	. . .
6667	59. 113
6671	7. 953
6673	. . .
6677	11. 607
6679	. . .
6683	41. 163
6689	. . .
6691	. . .

N.	Elem.
6697	37. 181
6701	. . .
6703	. . .
6707	19. 353
6709	. . .
6713	7. 7. 137
6719	. . .
6721	11. 13. 47
6727	7. 31. 31
6731	53. 127
6733	. . .
6737	. . .
6739	23. 293
6743	11. 613
6749	17. 397
6751	41. 157
6757	29. 233
6761	. . .
6763	. . .
6767	67. 101
6769	7. 967
6773	. . .
6779	. . .
6781	. . .
6787	11. 617
6791	. . .
6793	. . .
6797	7. 971
6799	13. 523
6803	. . .
6809	11. 619
6811	7. 7. 139
6817	17. 401
6821	19. 359
6823	. . .
6827	. . .
6829	. . .
6833	. . .
6839	7. 977
6841	. . .
6847	41. 167
6851	13. 17. 31
6853	7. 11. 89
6857	. . .
6859	19. 19. 19
6863	. . .
6869	. . .
6871	. . .
6877	13. 23. 23
6881	7. 983
6883	. . .
6887	71. 97
6889	83. 83
6893	61. 113
6899	. . .
6901	67. 103
6907	. . .
6911	. . .
6913	31. 223
6917	. . .
6919	11. 17. 37
6923	7. 23. 43
6929	13. 13. 41
6931	29. 239
6937	7. 991
6941	11. 631
6943	53. 131
6947	. . .
6949	. . .
6953	17. 409
6959	. . .
6961	. . .
6967	. . .
6971	. . .
6973	19. 367
6977	. . .
6979	7. 997
6983	. . .
6989	29. 241
6991	. . .
6997	. . .
7001	. . .
7003	47. 149
7007	7. 7. 11. 13
7009	43. 163
7013	. . .
7019	. . .
7021	7. 17. 59
7027	. . .
7031	79. 89
7033	13. 541
7037	31. 227
7039	. . .
7043	. . .
7049	7. 19. 53
7051	11. 641
7057	. . .
7061	23. 307
7063	7. 1009
7067	37. 191
7069	. . .
7073	11. 643
7079	. . .
7081	73. 97
7087	19. 373
7091	7. 1013

N.	Elem.
7093	41.173
7097	47. 151
7699	31. 229
7103	. . .
7109	. . .
7111	13. 547
7117	11. 647
7121	. . .
7123	17. 419
7127	. . .
7129	. . .
7133	7. 1019
7139	11. 11. 59
7141	37. 193
7147	7. 1021
7151	. . .
7153	23. 311
7157	17. 421
7159	. . .
7163	13. 19. 29
7169	67. 107
7171	71. 101
7177	. . .
7181	41. 167
7183	11. 653
7187	. . .
7189	7. 13. 79
7193	. . .
7199	23. 313
7201	19. 379
7207	. . .
7211	. . .
7213	. . .
7217	7. 1031
7219	. . .

N.	Elem.
7223	31. 233
7229	. . .
7231	7. 1033
7237	. . .
7241	13. 557
7243	. . .
7247	. . .
7249	11. 659
7253	. . .
7259	7. 17. 61
7261	53. 137
7267	13. 13. 43
7271	11. 661
7273	7. 1039
7277	19. 383
7279	29. 251
7283	. . .
7289	37. 197
7291	23. 317
7297	. . .
7301	7. 7. 149
7303	67. 109
7307	. . .
7309	. . .
7313	71. 103
7319	13. 563
7321	. . .
7327	17. 431
7331	. . .
7333	. . .
7337	11. 23. 29
7339	41. 179
7343	7. 1049
7349	. . .
7351	. . .

N.	Elem.
7357	7. 1051
7361	17. 433
7363	37. 199
7367	53. 139
7369	. . .
7373	73. 101
7379	47. 157
7381	11. 11. 61
7387	83. 89
7391	19. 389
7393	. . .
7397	13. 569
7399	7. 7. 151
7403	11. 673
7409	31. 239
7411	. . .
7417	. . .
7421	41. 181
7423	13. 571
7427	7. 1061
7429	17. 19. 23
7433	. . .
7439	43. 173
7441	7. 1063
7447	11. 677
7451	. . .
7453	29. 257
7457	. . .
7459	. . .
7463	17. 439
7469	7. 11. 97
7471	31. 241
7477	. . .
7481	. . .
7483	7. 1069

N.	Elem.
7487	. . .
7489	. . .
7493	59. 127
7499	. . .
7501	13. 577
7507	. . .
7511	7. 29. 37
7513	11. 683
7517	. . .
7519	73. 103
7523	. . .
7529	. . .
7531	17. 443
7537	. . .
7541	. . .
7543	19. 397
7547	. . .
7549	. . .
7553	7. 13. 83
7559	. . .
7561	. . .
7567	7. 23. 47
7571	67. 113
7573	. . .
7577	. . .
7579	11. 13. 53
7583	. . .
7589	. . .
7591	. . .
7597	71. 107
7601	11. 691
7603	. . .
7607	. . .
7609	7. 1087
7613	23. 331
7619	19. 401
7621	. . .
7627	29. 263
7631	19. 587
9633	17. 449
7637	7. 1091
7639	. . .
7643	. . .
7649	. . .
7651	7. 1093
7657	13. 19. 31
7661	47. 163
7663	79. 97
7667	11. 17. 41
7669	. . .
7673	. . .
7679	7. 1097
7681	. . .
7687	. . .
7691	. . .
7693	7. 7. 157
7697	43. 179
7699	. . .
7703	. . .
7709	13. 593
7711	11. 701
7717	. . .
7721	7. 1103
7723	. . .
7727	. . .
7729	59. 131
7733	11. 19. 37
7739	71. 109
7741	. . .
7747	61. 127
7751	23. 337
7753	. . .
7757	. . .
7759	. . .
7763	7. 1109
7769	17. 457
7771	19. 409
7777	7. 11. 101
7781	31. 251
7783	43. 181
7787	13. 599
7789	. . .
7793	. . .
7799	11. 709
7801	29. 269
7807	37. 211
7811	73. 107
7813	13. 601
7817	. . .
7819	7. 1117
7823	. . .
7829	. . .
7831	41. 191
7837	17. 461
7841	. . .
7843	11. 23. 31
7847	7. 19. 59
7849	47. 167
7853	. . .
7859	29. 271
7861	7. 1123
7867	. . .
7871	17. 463
7873	. . .
7877	. . .
7879	. . .
7983	. . .
7889	7. 7. 7. 23

N.	Elem.
7891	13. 607
7897	53. 149
7901	. .
7903	7. 1129
7907	. .
7909	11. 719
7913	41. 193
7919	. . .
7921	89. 89
7927	. .
7931	7. 11. 103
7933	. .
7937	. .
7939	17. 467
7943	13. 13. 47
7949	. .
7951	. .
7957	73. 109
7961	19. 419
7963	. .
7967	31. 257
7969	13. 613
7973	7. 17. 67
7979	79. 101
7981	23. 347
7987	7. 7. 163
7991	61. 131
7993	. .
7997	11. 727
7999	19. 421
8003	53. 151
8009	. .
8011	. .
8017	. .
8021	13. 617
8023	71. 113
8027	23. 349
8029	7. 31. 37
8033	29. 277
8039	. . .
8041	11. 17. 43
8047	13. 619
8051	83. 97
8053	. . .
8057	7. 1151
8059	. . .
8063	11. 733
8069	. . .
8071	7. 1153
8077	41. 197
8081	. . .
8083	59. 137
8087	. . .
8089	. . .
8093	. . .
8099	7. 13. 89
8101	. . .
8107	11. 11. 61
8111	. . .
8113	7. 19. 61
8117	. . .
8119	23. 353
8123	. . .
8129	11. 739
8131	47. 173
8137	79. 103
8141	7. 1163
8143	17. 479
8147	. . .
8149	29. 281
8153	31. 263
8159	41. 199
8161	. . .
8167	. . .
8171	. . .
8173	11. 743
8177	13. 17. 37
8179	. . .
8183	7. 7. 167
8189	19. 431
8191	. . .
8197	7. 1171
8201	59. 139
8203	13. 631
8207	29. 283
8209	. .
8213	43. 191
8219	. . .
8221	. . .
8227	19. 433
8231	. . .
8233	. . .
8237	. . .
8239	7. 11. 107
8243	. . .
8249	73. 113
8251	37. 223
8257	23. 359
8261	11. 751
8263	. . .
8267	7. 1181
8269	. . .
8273	. . .
8279	17. 487
8281	7. 7. 13. 13

N.	Elem.
8287	. . .
8291	. . .
8293	. . .
8297	. . .
8299	43. 193
8303	19. 19. 23
8309	7. 1181
8311	. . .
8317	. . .
8321	53. 157
8323	7. 29. 41
8327	11. 757
8329	. . .
8333	13. 641
8339	31. 269
8341	19. 439
8347	17. 491
8351	7. 1193
8353	. . .
8357	61. 137
8359	13. 643
8363	. . .
8369	. . .
8371	11. 761
8377	. . .
8381	17. 17. 29
8383	83. 101
8387	. . .
8389	. . .
8393	7. 11. 109
8399	37. 227
8401	31. 271
8407	7. 1201
8411	13. 647
8413	47. 179
8417	19. 443
8419	. . .
8423	. . .
8429	. . .
8431	. . .
8437	11. 13. 59
8441	23. 367
8443	. . .
8447	. . .
8449	7. 17. 71
8453	79. 107
8459	11. 769
8461	. . .
8467	. . .
8471	43. 197
8473	37. 229
8477	7. 7. 173
8479	61. 139
8483	17. 499
8489	13. 653
8491	7. 1213
8497	29. 293
8501	. . .
8503	11. 773
8507	47. 181
8509	67. 127
8513	. . .
8519	7. 1217
8521	. . .
8527	. . .
8531	19. 449
8533	7. 23. 53
8537	. . .
8539	. . .
8543	. . .
8549	83. 103
8551	17. 503
8557	43. 199
8561	7. 19. 67
8563	. . .
8567	13. 659
8569	11. 19. 41
8573	. . .
8579	23. 373
8581	. . .
8587	31. 277
8591	11. 11. 71
8593	13. 661
8597	. . .
8599	. . .
8603	7. 1229
8609	. . .
8611	79. 109
8617	7. 1231
8621	37. 233
8623	. . . .
8627	. . . .
8629	. . .
8633	97. 89
8639	53. 163
8641	. . .
8647	. . . .
8651	41. 211
8653	17. 509
8657	11. 787
8659	7. 1237
8663	. . .
8669	. . .
8671	13. 23. 29
8677	. . .

N.	Elem.
8681	. . .
8683	19. 457
8687	7. 17. 73
8689	. . .
8693	. . .
8699	. . .
8701	7. 11. 113
8707	. . .
8711	31. 281
8713	. . .
8719	. . .
8723	11. 13. 61
8729	7. 29. 43
8731	. . .
8737	. . . .
8741	. . .
8743	7. 1249
8747	. . .
8749	13. 673
8753	. . .
9759	19. 461
8761	. . .
8767	11. 797
8771	7. 7. 179
8773	31. 283
8777	67. 131
8779	. . .
8783	. . .
8789	11. 17. 47
8791	59. 149
8797	19. 463
8801	13. 677
8803	. . .
8807	. . .
8809	23. 383
8813	7. 1259
8819	. . .
8821	. . .
8827	7. 13. 97
8831	. . .
8833	11. 11. 73
8837	. . .
8839	. . .
8843	37. 239
8849	. . .
8851	53. 167
8857	17. 521
8861	. . .
8863	. . .
8867	. .
8869	7. 7. 181
8873	19. 467
8879	13. 683
8881	83. 107
8887	. .
8891	17. 523
8893	. .
8897	7. 31. 41
8899	11. 809
8903	29. 307
8909	59. 151
8911	7. 19. 67
8917	37. 241
8921	11. 811
8923	. . .
8927	79. 113
8929	. . .
8933	. . .
8939	7. 1277
8941	. . .
8947	23. 389
8951	. . .
8953	7. 1279
8957	13. 13. 53
8959	17. 17. 31
8963	. . .
8969	. . .
8971	. . .
8977	47. 191
8981	7. 1283
8983	13. 691
8987	11. 19. 43
8989	89. 101
8993	17. 23. 23
8999	. . .
9001	. . .
9007	. . .
9011	. . .
9013	. . .
9017	71. 127
9019	29. 311
9023	7. 1289
9029	. . .
9031	11. 821
9037	7. 1291
9041	. .
9043	. .
9047	83. 109
9049	. . .
9053	11. 823
9059	. . .
9061	13. 17. 41
9067	. . .
9071	47. 193
9073	43. 211

9077

N.	Elem.
9077	29. 313
9079	7. 1297
9083	31. 293
9089	61. 149
9091	. . .
9097	11. 827
9101	19. 479
9103	. . .
9107	7. 1301
9109	. . .
9113	13 701
9119	11. 829
9121	7. 1303
9127	. . .
9131	23. 397
9133	. . .
9137	. . .
9139	13. 19. 37
9143	41. 233
9149	7. 1307
9151	. . .
9157	. . .
9161	. . .
9163	7. 11. 119
9167	89. 103
9169	53. 173
9173	. . .
9179	67. 137
9181	. . .
9187	. . .
9191	91. 101
9193	29. 317
9197	17. 541
9199	. . .
9203	. . .

N	Elem.
9209	. . .
9211	61. 151
9217	13. 709
9221	. . .
9223	13. 401
9227	. . .
9229	11. 839
9233	19. 487
9239	. . .
9241	. . .
9247	7. 1321
9251	11. 29. 29
9253	19. 487
9257	. . .
9259	47. 197
9263	59. 157
9269	13. 23. 31
9271	73. 127
9277	. . .
9281	. . .
9283	. . .
9287	37. 251
9289	7. 1327
9293	. . .
9299	17. 547
9301	71. 131
9307	41. 227
9311	. . .
9313	67. 139
9317	7. 11. 11. 11
9319	. . .
9323	. . .
9329	19. 491
9331	7. 31. 43
9337	. . .

N.	Elem.
9341	. . .
9343	. . .
9347	13. 719
9349	. . .
9353	47. 199
9359	7. 7. 191
9361	11. 23. 37
9367	17. 19. 29
9371	. . .
9373	7. 13. 103
9377	. . .
9379	83. 113
9383	11. 853
9389	41. 229
9391	. . .
9397	. . .
9401	7. 17. 79
9403	. . .
9407	23. 409
9409	97. 97
9413	. . .
9419	. . .
9421	. . .
9427	11. 857
9431	. . .
9433	. . .
9437	. . .
9439	. . .
9443	7. 19. 71
9449	11. 859
9451	13. 727
9457	7. 7. 193
9461	. . .
9467	. .
9469	17. 557

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
9473	. . .	9607	13. 739	9737	7. 13. 107
9479	. . .	9611	7. 1373	9739	. . .
9481	19. 499	9613	. . . .	9743	. . .
9487	53. 179	9617	59. 163	9749	. . .
9491	. . .	9619	. . .	9751	7. 7. 199
9493	11. 863	9623	. .	9757	11. 887
9497	. . .	9629	. .	9761	43. 227
9499	7. 23. 59	9631	. .	9763	13 751
9503	13 17. 43	9637	23. 419	9767	. . .
9509	37. 257	9641	31. 311	9769	. . .
9511	. . .	9643	. .	9773	29. 337
9517	31. 307	9647	11. 877	9779	7. 11. 127
9521	. . .	9649	. .	9781	. . .
9523	89. 107	9653	7. 7. 197	9787	. . .
9527	7. 1361	9659	13. 743	9791	. . .
9529	13. 733	9661	. .	9793	7. 1399
9533	. . .	9667	7. 1381	9797	97. 101
9539	. . .	9671	19. 509	9799	41. 239
9541	7. 29. 47	9673	17. 569	9803	. . .
9547	. . .	9677	. .	9809	17. 577
9551	. . .	9679	. .	9811	. . .
9553	41. 233	9683	23. 421	9817	. . .
9557	19. 503	9689	. .	9821	7. 23. 61
9559	11. 11. 79	9691	11. 881	9823	11. 19. 47
9563	73. 131	9697	. .	9827	31. 317
9569	7. 1367	9701	89. 109	9829	. . .
9571	17. 563	9703	31. 313	9833	. . .
9377	61. 157	9707	17. 571	9839	. . .
9581	11. 13. 67	9709	7. 19. 73	9841	13. 757
8583	7. 37. 37	9713	11. 883	9847	43. 229
9587	. . .	3719	. .	9851	. . .
9589	43. 223	9721	. .	9853	59. 167
9393	53. 181	9727	71. 137	9857	. . .
9599	29. 331	9731	37. 263	9859	. . .
9601	. . .	9733	. .	9863	7. 1409

N.	Elem.	N.	Elem.	N.	Elem.
9869	71. 139	9913	23. 431	9959	23. 433
9871	. . .	9917	47. 211	9961	7. 1423
9877	7. 17. 83	9919	7. 13. 109	9967	. . .
9881	41. 241	9923	. . .	9971	13. 13. 59
9883	. . .	9931	. . .	9973	. . .
9887	. . .	9937	19. 523	9977	11. 907
9889	11. 29. 31	9941	. . .	9979	17. 587
9893	13. 761	9943	61. 163	9983	67. 149
9899	19. 521	9947	7. 7. 7. 29	9989	7. 1427
9901	. . .	9949	. . .	9991	97. 103
9907	. . .	9953	37. 269	9997	13. 769
9911	41. 17. 53				

An-

Anmerckung und Gebrauch von vorigen Tabellen.

I.

MAn findet zwar in Transactionibus Anglicanis * und beym Wallisio, ** daß D. Pell am Ende seiner Introduct. ad Algebram, (so Thomas Branker anno 1668. heraus gegeben,) auch Tabulas Imparium mit angehenget, welche in ihre Prim-Zahlen resolviret, alleine so offt als ich mich bemühet, so habe dieses hier zu Land sehr rare Buch nicht können zu sehen bekommen, auch wird in der Histoire de l' Academ. des Sciences *** gemeldet, daß Mr. de Traytorens d' Yverdun 1717. der Academie ein Project von dergleichen Zahlen præsentiret, welches von ihr vor sehr gut befunden worden, aber auch diese sind nicht zum Vorschein kommen, derowegen habe selbst an dergleichen Tabellen gearbeitet, und auch mit arbeiten lassen, worinnen anfangs nicht allein alle ungrade, sondern auch alle zwischen stehende grade Zahlen, von 1 biß auf 10000 in ihre Elementa analysiret, und die Primi darunter mit Puncten bemercket seyn. Indem aber dergleichen Anatomie am gegenwärtigen Wercklein zu hoch angewachsen, und selbiges gar zu weitläufftig worden wäre, so habe solche Einrichtung nur biß 1000 behalten, von Anmerck.

* Transact. Philosoph. N. 35. 1668. m. Maj.

** Wallisii Discourse of Combin. Altern. and aliquot Parts. pag. 135.

*** Histoire de l' Acad. Royale des Sciences 1717. p. 54.

denen übrigen neuntausend aber nur die ungraden gesetzet, und zwar deren Collect nicht in 3 aufgehet, ingleichen die sich nicht in 5 endigen. Denn also fallen die ohne dem so gleich abzusehenden Divisores: 2. 3. 4. 5. 6. 8. und 9 gäntzlich hinweg, (§. 396.) woraus dann eine gar schickliche und sehr grosse Abkürtzung sothaner Tabellen entstanden. Hätte nun iemand des D. Pells seine, so könte man zugleich mit sehen, ob alles genau übereinträffe, wie denn Wallisius darinne eben auch auf die 30 Errata im angezogenen Discourse p. 136. recensiret.

I. Aufgabe.

1. Aufgabe.

2. Die Factores, oder ersten Elementa von einer gegebenen Zahl zu finden.

Z. E. Man wolte die Factores von 7553. wissen.

1.) Suche man sie unter der Reihe N, in den 7 Tausenden und 5 Hunderten, so stehet 7553 bey denen Elementis 7. 13. 83. Aus deren Multiplication sie nehmlich entstehet, sintemahl $7.13 = 91$, und $91.83 = 7553$. Wo keine Elementa, sondern nur etliche Puncte bey einer Zahl stehen, dieselbe ist eine Prim-Zahl, und hat keine Factores, (§. 282.) und wird ausser von sich selbst, nur von der Unität ausgemessen. (§. 288.)

2.) Ist sie aber in den Tabellen nicht befindlich, so hebe man sie alsofort mit 2, 3, oder 5 auf, dann wird die aufgehobene schon drinne stehen,

hen, als 7446 hebe man erst mit 2. 3 oder 6 auf. (§. 396.) kommt: 1241 deren Factores sind 17 und 73. folglich sind die Elementa von 7446. die Prim-Zahlen 2. 3. 17. 73.

3.) Ist die gegebene Zahl über 10000, und mit eintzelen Zahlen aufheblich, so hebe man sie (nach dem 396. §.) so lange auf, biß sie unter 10000 kömmt, und verfahre alsdann wie ietzo bereits angewiesen worden.

4.) Daferne sie sich aber mit eintzelen Zahlen nicht lässet aufheben, muß man ihre Factores nach der 46. Aufgabe (§. 547.) untersuchen.

Nutzen. 3. Man soll eine Linie z. E. einen Quadranten in 90 gleiche Theile theilen, so suche man die Elementa zu 90, sind 2. 3. 3. 5. Derowegen kan man den Quadranten erst in 3 Theile, hernach einen wieder in 2, dann solchen in 3, und endlich den letzten in 5=Theile theilen, so geben sich just 90 Grad, wovon der bekannte Vers: In tres, in binas, in tres, in quinque secato. (§. 296.)

II. Aufgabe.

II. Aufgabe. 4. Die Divisores oder Partes aliquotas einer gegebenen Zahl zu erfahren.

1.) Erfinde man nach vorhergehender Aufgabe ihre Factores.

2.) Gebe man ihren Potenzen, das ist, denen an sich selbst multiplicirten Elementis, die gehörigen Exponenten.

3.) Addire man zu ieden Exponenten 1, und multiplicire sodann alle in einander, so kommt der Numerus Divisorum, welcher - 1 die Anzahl der Partium aliquotarum giebt. (§. 328. 316.)

4.) Setze man die Divisores aus dem Composito der vorhergehenden Factorum in einen Perpendicul, und multiplicire ihn mit denen Divisoribus des letzten Compositi, so kommen alle Divisores. (§. 329.)

Z. E. Man untersuche die Divisores von 24804.

weil sie gröſſer als 10000, hebe man 9) 2756

sie auf, als mit 9, 4 ꝛc. 4) 689 = 13.53

Demnach sind die Factores von 24804 die Prim-Zahlen 2.2.3.3.13.53. = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^1 \cdot 53^1$, davon 3.3.2.2. = 36 = dem Numero Divisorum.

Nun setze man die Divisores von 2. 2. 3. 3. oder 36 in einen Perpendicul, und multiplicire sie alle mit einander mit den Divisoribus des letzen Compositi, nehmlich mit 13. 53 und 689.

1	13	53	689
2	26	106	1378
3	39	159	2067
4	52	212	2756
6	78	318	4134
9	117	477	6201
12	156	636	8268
18	234	954	12402
36	468	1908	24804

Vortheil. 5. Man braucht die grossen Zahlen in der Multiplication nicht abzusetzen, denn so z. E. 9 mahl 689 zum Facit 6201 bringt, so darff man nur das Noncuplum doppelt nehmen, so giebt solch Duplum 18 mahl 689. und also auch mit andern.

6. Wenn

6. Wenn der Modul in der Bau-Kunst 120 gleiche Nutzen. Theile bekömmt, so sind die aufgänglichen Brüche, oder Austheilungen davon:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	30	40	60	120

Denn zu 120 finden sich in Tabulis $2^3.3.5 = 24.5$

Nun sind die Divisores von 24	1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24
diese mit 5 multipl. =	5. 10. 15. 20. 30. 40. 60. 120

Also sind die Zerstreuungs-Brüche von unsern Centner à 110 Pf. keine andern, als

1	1	1	1	1	1
2	5	10	11	22	55

Denn 110 ist in Tabb. = 2. 5. 11 = 10. 11.

Die Divisores von 10 sind	1. 2. 5. 10
diese multipl. mit 11.	11 22 55 110.

III. Aufgabe.

7. Die Multiplication vermittelst dieser Tabellen zu abbreviren. III. Aufgabe.

Man multiplicire den einen Factorem nach und nach mit des andern Factoris Elementen. (§. 411. 412.) Wobey es zugleich dienlich, daß man 2.2. | 2.3. | 2.2.2 | 3.3. desgleichen 2.5 in 4. 6. 8. 9 und 10 contrahiret.

Als man resolvire	365 Thl. 18 Gr. 5 Pf. in Pf.
von 288 sind	2920 (8
die Fact. 8. 6. 6	17556 (6
Facit	105341 Pf. (6

Not. Indem die Thl. mit 6 mahl 8 multiplicirt keine Gr. sondern nur Sechser geben, addire man in der andern Mul-

Multiplication so gleich das Duplum derer Gr. nehmlich 36 Sechser dazu.

Desgleichen multiplicire man

6978 mit 594 = 11. 9. 6.

76758 (11

690822 (9

Fac. 4144932 (6

Denn ob es wohl auch 3 Multiplicationes giebt, so erspahret man doch die Addition der partial-Producte. Man besehe auch hievon den 427 §. lit. γ.

IV. Aufgabe.

IV. Aufgabe.

8. Die Division durch Hülffe voriger Tabellen zu verkürtzen. Es ist davon §. 436. 437. schon gedacht worden. Hier geschiehet sie gar leichte denn wenn der Divisor und Dividendus Elementa communia haben, darff man nur dieselben, wie im Calculo literali oben und unten ausstreichen, so geben die überbliebenen zusammen genommen, den Quotum, als

975 3. 5 5. 13 / 11

= ——— ——— = 15. (§. 240. 1.)

divid. mit 65 5. 13 / 11

Oder man mache obige 105341 Pf. wieder zu Thl.

6) 17556: 5 Pf.

8) 2194: 4

6) 365 Thl. 18 Gr. 5 Pf. (§. 437.)

Nehmlich $\frac{36}{48}$ Thl. sind = $\frac{18}{24}$ Thl. oder 18 Gr.

V.

V. Aufgabe.

9. Aus denen Quadrat- und Cubic-Zahlen ꝛc. so gleich ihre Wurtzel zu ziehen. V. Aufgabe.

Man suche sie in Tabulis, so müssen sich ihre Elementa entweder in gleiche Primos, oder gleiche Compositos resolviren, (§. 473.) Als aus 784 sind die Elementa 2.2.2.2.7.7 = (4.7). (4.7) = 28^2 (§. 275.) Aus 7569 ist V87. Denn so man mit 3.3 aufhebt, kommt 841 = 29.29. folglich Radix Quadr. = 3.29 = 87.

Aus 9604 ist Rad. Quadr. 98. Denn 9604:4 = 2401 = 7.7.7.7 und daher V2.7.7 oder 98 u. s. w.

VI. Aufgabe.

10. Zu erfahren, wie viel und was vor welche Potentzen in einer vorgebenen Zahl enthalten. VI. Aufgabe.

1.) Suche man ihre Factores nach der 1 Aufgabe.

2.) Nehme man einerley Factores nach und nach durchs multipliciren zusammen, und gebe ihnen ihre gehörige Exponenten, desgleichen multipliire man die gefundenen ähnlichen Potentzen auch in einander, nehmlich Quadrata mit Quadratis, Cubos mit Cubis &c. so kommen alle darinnen enthaltene Potestäten. (§. 473.)

Als

Als so man die Potestäten ausder Zahl 71001

verlanget(hebe man sie mit 3. 3 oder 9 auf: 7889
(§. 396.)

Diese suche man in Tabb. so stehen die Elementa 7.7.7.23
gegen über. Derowegen sind die Elem. von 71001 $=$
$3.3.7.7.7.13 = 3^2.7^2.7.13 =$
$(3.7)^2.7.13. = 9.7^3.13.$ (§. 295.)
Demnach stecken viererley Potentzen, nehmlich die Quadrata 9. 49. 441 und der Cubus 343. darinnen.

VII. Aufgabe.

VII. Aufgabe. 11. Die Surdischen Zahlen zu untersuchen, ob sie communicantes, (das ist, auf eine Simplere Expression zu reduciren) seyn.

Man erforsche nach vorhergehender Aufgabe, ob sie mit eben dergleichen Potentzen also aufzuheben, daß einerley Quoti heraus kommen, und so dieses angehet, setze man ihre Wurtzeln ausser dem Signo, und die gleichen Quotos unter daß Signum. Z. E. Man erfahre ob V486 und V726 leichter zu exprimiren.

$486 = 2.3.3.3.3.3$

und $726 = 2.3.11.11$ so wird man sehen,

$486:(9.9) = 2.3.$ oder 6 und $726:(11.11)$
$= 2.3 = 6$ (§. præc. 8.)

Derowegen kan man vor die erste 9 V6, und vor die andere 11 V6 setzen, und werden sie dadurch unter einerley Nenner gebracht.
Also ist Vcub. aus $448 = (2.2.2.2.2.2.7)^{1:3}$
und Vcub. aus $875 = (5.5.5.7)^{1:3}$

Dero-

Derowegen kan man man vor sie 4 Vc. 7 und 5 Vc. 7 substituiren. (§. 604.)
Dieses hat seinen grossen Nutzen in Calculo Irrationalium.

VIII. Aufgabe.

12. Zu 2 und mehr gegebenen Zahlen das gemeine gröste Maaß, und die kleinsten in solcher Verhältniß zu finden. VIII. Aufgabe.

1.) Suche man beyder oder aller Factores, nach der ersten Aufgabe.

2.) Lesche man diejenigen aus, so sie mit einander gemein haben.

3. Multiplicire man die ausgeleschten in einander, so giebt ihr Factum, das gemeine gröste Maaß, und sind die unausgeleschten die sich also verhaltente Primi inter se.

Z. E. Von 28836 und 6408 ist das gemeine gröste Maaß, 3204. und sind die kleinsten in solcher Verhältniß 9 und 2.

Denn 28836 | 6408

9) 3204 | 9) 712 = 2.2.2.89

4) 801 = 3.3.89.

Folglich sind beyder Factores: 2.2.3.3.3.3.89
(1 1 1 1 1)

und 3.3.2.2.2.89
(1 1 1 1 1)

IX. Aufgabe.

13. Zu 2 gegebenen Zahlen die kleinste ausmeßliche, (Dividuum minimum) zu finden. IX. Aufgabe.

1.) Wo

1.) Wo sie es nicht schon sind, reducire man sie auf Primos inter se, nach voriger Aufgabe.

2.) Multiplicire man die gegebene gröste mit dem gefundenen kleinsten primo inter se, so kommt der Dividuus minimus. (§. 335.)

Als von 308 und 231

308 = 2.2.7.11 (11 1 1)

231 = 3.7.11 (11 1 1)

sind die primi inter se 4 und 3. Daher ist der Dividuus minimus = 3. 308 = 924.

Sind mehr als 2 Zahlen gegeben, verfahre man nach dem 337 §.

X. Aufgabe.

X. Aufgabe.

Einen Bruch in kleinere gleichgültige Zahlen zu resolviren.

Man bringe nach vorhergehender VIII. Aufgabe den Zehler und Nenner auf Primos inter se, z. E.

198 = 2.3.3.11 (1 1 11) 3

Der Bruch ——— ——————— thut —

264 = 2.2.2.3.11 (1 1 1 11) 4

Nutzen. 14. Diese letzten 3 Aufgaben haben ihren guten Nutzen im Calculo Rationum, denn dadurch kan man die grossen und mühsamen Zahlen wegwerffen, und an deren statt kleinere gleichgültige gebrauchen.

Anmerck. 15. Man könte noch viel dergleichen nützliche und in der Praxi viel abkürtzende Aufgaben mit beybringen, alleine Zeit und Raum hat diesesmahl mehrere nicht verstattet, und begnüge mich indessen nur die vornehmsten mit angehenget zu haben.

E N D E.

LBC

L 4. 3. 71.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Poetius, Johann Michael,

Gründliche Anleitung zu der unter den Gelehrten jetzt üblichen arithmetischen Wissenschaft vermittelst einer parallelen Algebra, Worinnen zugleich vom Gebrauch derer Rechnungen in Facultäten und Disciplinen auch von unterschiedenen Arithmetischen Instrumenten und Machinen gehandelt

Franckfurt ; Leipzig 1728

Coburg, Landesbibliothek -- E I 7/32
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942563-0